STUDIO

SULLE CONDIZIONI

DI EQUILIBRIO E DI STABILITÀ

DELLE CENTINE POLIGONALI
DELLA GRANDE TETTOIA PEI CONVOGLI
NELLA STAZIONE D'AREZZO

CON ESTENSIONE

AI SISTEMI POLIGONALI ARTICOLATI COMPLESSI

CHE HANNO PER DIRETTRICE LA CURVA CIRCOLARE

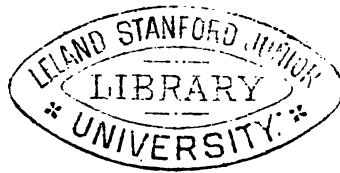
FATTO PER COMMISSIONE DEL MUNICIPIO D'AREZZO

DALL' INGEGNERE

GIULIO MARCHESI

CAPO DELL' UFFICIO PER LE COSTRUZIONI DELLE FERROVIE MERIDIONALI
GIÀ PROFESSORE DI COSTRUZIONI NELLA R. SCUOLA D'APPLICAZIONE
PER GL' INGEGNERI IN TORINO.

FIRENZE,
TIPOGRAFIA DI G. BARBÈRA.
Via Faenza, N° 66.

1872.

UNA PAROLA DI PREFAZIONE.

È nelle regole della Scuola d' Applicazione per gl' Ingegneri in Torino, che i giovani Allievi, nell' atto che si presentano allo esame pubblico di laurea, trattino, in una dissertazione stampata, un argomento preso a libera loro scelta, in applicazione di alcuno degl' insegnamenti dello Instituto, e su quella sostengano la discussione.

Tra gli argomenti scelti negli esami dell' anno 1870, fuvvi chi prese a tema la stabilità della Tettoia d' Arezzo, e, instituiti gli opportuni calcoli, ebbe a trovare che i tiranti di ferro delle centine, che la sostengono, supposto un sovraccarico accidentale di 100 chilogrammi per metro quadrato di superficie coperta, riescirebbero assoggettati ad uno sforzo di tensione di chilogrammi 34,9 per millimetro quadrato di

sezione; sforzo, che ognuno sa oltrepassare di molto quello entro il quale si mantiene inalterata la elasticità del metallo, ed è assai prossimo a quello che è capace di produrre la rottura, anzi, per la più parte dei ferri di commercio, rappresenta il limite stesso di rottura.

Sebbene il sovraccarico accidentale considerato oltrepassi di molto quello, che suolsi assumere nel calcolo di questo genere d' Opere, in un paese, massime, dove una delle precipue cause di sovraccarico, che è il peso della neve, non ha grande importanza, tuttavia quello sforzo eccezionale trovato dal giovane Ingegnere destò l' allarme; e, tenutasi in osservazione la Tettoia alcun tempo, e notati alcuni movimenti, che si manifestavano nelle centine, l' idea del pericolo di rovina sopravvenne; e questa idea sovra ogni altra prevalendo, confermata da nuovi calcoli fatti, con altri criterii, da altri Ingegneri, condusse il Consiglio Superiore dei Lavori Pubblici a riconoscere prudente, che quella Tettoia si demolisse, non giudicando che il sistema suo si prestasse ad un consolidamento, il quale, escludendo ogni pericolo, riuscisse tanto economico che valesse mantenere il vizioso sistema di quelle centine.

E il Governo, sul voto così esplicito del Consiglio Superiore, ordinava la immediata demolizione della Tettoia.

Il Municipio d'Arezzo, sollecito di conservare ai Cittadini suoi questa comodità: mal persuadendosi, che una Tettoia, che dura da sei anni, e non dà visibili segni di degradazione, potesse trovarsi nello stato di minacciante rovina, in cui fu dal Governo tenuta: e temendo, che la Società delle Ferrovie Romane, ove ottemperasse agli ordini Ministeriali di demolizione, non fosse per accingersi, così tosto, a costruire in condizioni più stabili la Tettoia stessa, commetteva all'Ingegnere Marchesi l'incarico di instituire calcoli diretti, per riconoscere: se di fatto si verificassero quegli straordinari sforzi, che renderebbero fondato l'ordine del Governo; e, quando si verificassero uguali o superiori a quelli, che nelle pubbliche costruzioni si esigono, vedesse se il sistema della Tettoia non ammettesse, per avventura, qualche maniera di rinforzo, che convenisse applicare, anzichè venire al partito estremo della demolizione.

Ecco l'origine di questo Studio; il quale essendo riuscito di una qualche generalità, ed

al di là dei limiti, nei quali suol essere contenuto, nei Trattati di Costruzioni, l'argomento dei sistemi articolati complessi, il Municipio d'Arezzo manda alle stampe, perchè torni a comune vantaggio, e, ad un tempo, accerti i meno credenti della stabilità reale della Tettoia d'Arezzo, e dimostri in qual semplice modo si possa rimediare al difetto organico, che si riscontra in quel sistema di centine.

Febbraio 1872.

INDICE

DEI CAPITOLI DEL PRESENTE STUDIO.

I.

Sistema delle Centine della Tettoia d'Arezzo.

La Tettoia d' Arezzo è sorretta da un sistema di centine circolari composte di due archi eccentrici di diverso raggio, che fra loro distanti alla chiave di una quantità data, vengono ad intersecarsi all' imposte. Di questi due archi, il supremo è costituito da una serie di quattordici paradossi rettilinei di legname di breve lunghezza, che riducono l' arco al poligono regolare inscritto di tanti lati quanti sono i paradossi; ed il secondo, rilegato al primo per mezzo di una serie di saette, corrispondenti ai capi dei paradossi, e dividenti per mezzo l' angolo, che essi formano, è costituito da una catena di ferro, snodata negl' incontri colle saette, che riesce pur esso un poligono di un numero di lati conforme a quello della parte superiore della centina, ma non regolare.

Il sistema così combinato assume la forma di mezzaluna rovesciata e costituisce una di quelle

travi composte, che i costruttori hanno preso a distinguere col nome di *travi a falce*. (V. Tav.ª Iª, fig. 1ª.)

II.

Metodo di calcolo.

Ricercando le condizioni di equilibrio e di stabilità di una tale trave, nelle disposizioni adottate e nelle dimensioni assegnate alle centine della Stazione d'Arezzo, è opportuno cominciare a fare astrazione dalle dimensioni trasversali delle singole parti, e supporle ridotte a semplici linee materiali, e, per parlare più esattamente, ai luoghi geometrici dei centri di gravità delle rispettive sezioni trasversali.

Ridotto il sistema a semplici linee, noi cominciamo a vedere: che il poligono esteriore è quello che riceve l'azione delle forze, che operano sul sistema, e vi resiste in parte; che le saette, rappresentate dalle porzioni di raggio intercettate fra i due poligoni, non fanno che trasmettere al secondo poligono, le componenti delle forze anzidette, stimate secondo le normali all'arco di circolo circoscritto al medesimo; che finalmente il secondo poligono si trova sottoposto all'azione di queste componenti, e deve ad esse fare opportuno contrasto.

Cominciamo a considerare il poligono esteriore. Il sistema essendo perfettamente simmetrico rispetto al piano mediano verticale, condotto per l'asse longitudinale della Tettoia, e simmetrica potendo supporsi la distribuzione dei sovraccarichi acciden-

tali, che hanno da considerarsi nel computo della stabilità, potrà il calcolo limitarsi a una delle due metà di una Centina, compresa fra l' imposta e la verticale alla chiave; imaginando surrogata all' azione, che l' altra metà esercita sulla metà considerata, una forza orizzontale, che ne tenga luogo, e che dovremo determinare.

III.

Carico permanente e sovraccarichi accidentali.

Le forze, che operano sul poligono superiore della mezza centina, che consideriamo, sono: il peso proprio della centina, quello degli arcarecci, e quello della parte di copertura che vi sovrincombe; e questi pesi costituiscono il carico permanente; — poi si hanno da considerare i sovraccarichi accidentali, cioè quelle forze, le quali non operando permanentemente sulla Tettoia, ma a intervalli, pure la stabilità esige che si considerino allo stesso modo dei carichi permanenti, e nel massimo della loro azione; e tali forze derivano dal peso della neve, che può cadere e mantenersi sul tetto, e dall' azione intermittente del vento.

Il carico permanente e quello accidentale derivante dal peso della neve, sono forze costantemente verticali, che, per semplicità di calcoli, e senza tema di andare molto errati, possiamo immaginare uniformemente ripartite e concentrate sui vertici del poligono.

Il vento invece, che costituisce un' azione, alla

quale deve poter resistere il sistema della Tettoia, può operare con direzioni ed intensità assai diverse, e, quel che più monta, può operare anche assai inegualmente sulle centine, sia perchè nel medesimo tempo non percuote che una parte sola del tetto, sia perchè a cagione della curvatura del medesimo, la intensità della pressione, che esso esercita, varia da punto a punto.

Però giova considerare, che mentre il sovraccarico dipendente dal peso della neve opera più particolarmente sulla parte centrale del medesimo, perchè a cagione del rapido inclinarsi della falda, la neve non vi si può arrestare; l'azione invece del vento si esercita più specialmente sulle falde estreme, perchè la sua direzione essendo d'ordinario assai poco inclinata all'orizzonte, se si scompongono le correnti elementari, che percuotono la falda del tetto, nelle componenti rispettivamente tangenti e normali alla curva direttrice della falda stessa, le prime non hanno azione sul tetto, le altre scemano evidentemente d'intensità, a misura che si procede verso il colmo, tanto che esse vi divengono assolutamente nulle, quando la direzione del vento si supponga orizzontale.

Vi ha adunque un tal quale compenso fra queste due maniere di sforzi temporanei, cui può andare soggetta la Tettoia; ond'è che, per semplificare i calcoli, potremo riunirli in un solo e considerarli siccome equivalenti ad un peso, che si eserciti sui vertici del nostro poligono, e si aggiunga a quello derivante dal peso proprio del sistema.

IV.

Determinazione algebrica degli sforzi sui puntoni.

Chiamiamo:

Φ l' angolo al centro del grand' arco;

φ l' angolo corrispondente all' arco sotteso da ciascun lato del poligono;

r il raggio del circolo circoscritto;

h la saetta del grand' arco;

p il carico permanente, su ciascun vertice;

q il carico accidentale, su ciascun vertice;

H la reazione orizzontale alla chiave della seconda mezza Centina.

Per avere completo il sistema delle forze operanti sulla mezza centina, bisogna ancora aggiungere la reazione dell' appoggio, che può esser rappresentata da due forze: l' una verticale, diretta di sotto in su, che chiameremo P; l' altra orizzontale, diretta dall' infuori all' indentro, che chiameremo Q.

Facciamo, per un momento, astrazione da queste due forze, che rappresentano la resistenza del piedritto, e limitiamoci a considerare tutte le altre. Ma prima avvertiamo, che il vertice supremo del poligono, facendo contemporaneamente parte di ciascuna delle due mezze centine, in cui abbiamo supposta divisa la centina totale, anzichè del peso $(p + q)$ come gli altri, dovrebbe, nell' ipotesi assunta di distribuzione dei carichi, essere ritenuto gravato del solo peso $\frac{1}{2}(p + q)$. Però, se si vuol tener conto che la cervice della Centina, per la sovrastruttura

del lucernario, riesce necessariamente più carica rispetto all' altre parti del tetto, si porterà il calcolo in condizioni più prossime al vero, considerando in quel vertice un carico maggiore, che non negli altri; e noi, per amor di semplicità, potremo assumere questo maggior carico $= \frac{1}{2}(p + q)$. Così tutti i vertici indistintamente della mezza centina saranno soggetti al peso $(p + q)$, e ciò, mentre porterà qualche semplificazione nelle formule, che siamo per ricavare, ha il vantaggio di condurci a risultati a danno della stabilità, epperò di maggior sicurezza.

Abbiamo adunque di fronte un sistema, quale è rappresentato dalla figura 2ª della Tav. Iª.

Se le forze verticali applicate a ciascun vertice, scomponiamo ciascuna rispettivamente in due: l'una secondo la normale alla curva, che circoscrive il poligono, l' altra, secondo la tangente alla medesima, egli è evidente, che il sistema delle componenti normali si trasmette ed è eliso integralmente dalla resistenza delle saette corrispondenti della Centina; mentre il sistema delle componenti tangenziali si trasmette da un lato del poligono al lato successivo; e siccome questi lati fanno angoli progressivamente crescenti rispetto all' orizzonte, dal vertice supremo all'imposta, la componente, che dal primo lato si trasmette al secondo, e successivamente dall' uno all' altro lato, si aggiunge a quella del lato, che si considera, riducendosi in ragione della maggiore inclinazione del lato medesimo rispetto a quello che lo precede.

Considerando pertanto il poligono, lato per lato, e chiamando S_0, S_1, S_2 .... $S_{(n)}$ gli sforzi subìti da ciascuno di essi, rispettivamente, a partire dal culmine, osserviamo che le forze agenti nel vertice (0) si trovano già, per ipotesi, dirette secondo la normale e secondo la tangente all' arco; la prima, come già si è detto, si trasmette integralmente ed è elisa dalla resistenza della saetta, che corrisponde al culmine dell' arco; la seconda riesce obliqua alla direzione del primo paradosso della Centina, epperò bisogna scomporre in due: l' una, secondo la direzione del paradosso stesso, l'altra, a questo normale.

Trasandando quest' ultima, di cui ci occuperemo più tardi, vediamo che in virtù della prima componente lo sforzo di compressione, a cui riesce cimentato il primo paradosso, è dato dall' espressione:

$$S_0 = H \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Nel vertice (1) la componente tangenziale della forza verticale $(p + q)$ è:

$$(p + q) \operatorname{sen} \varphi,$$

la quale facendo, colla direzione del secondo paradosso, l'angolo $\frac{\varphi}{2}$, dà luogo ad una seconda scomposizione, e produce in esso uno sforzo di compressione:

$$(p + q) \operatorname{sen} \varphi . \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Per altra parte, la compressione subìta dal primo paradosso, in virtù della forza S_0, si trasmette al

secondo; e nel trasmettersi, per l' inclinazione φ, che l' un paradosso ha sull' altro, si riduce a

$$S_0 \cos \varphi.$$

Onde sul vertice (1) avremo lo sforzo di compressione:

$$S_1 = (p + q) \operatorname{sen} \varphi \cos \frac{\varphi}{2} + S_0 \cos \varphi.$$

Nel vertice (2) la componente tangenziale della forza verticale $(p + q)$ risulta:

$$(p + q) \operatorname{sen} 2 \varphi;$$

e si riduce sul paradosso a

$$(p + q) \operatorname{sen} 2 \varphi \cos \frac{\varphi}{2}.$$

La compressione trasmessa dal paradosso precedente riducendosi a

$$S_1 \cos \varphi,$$

lo sforzo di compressione totale sul paradosso (2)(3) riesce:

$$S_2 = (p + q) \operatorname{sen} 2 \varphi \cos \frac{\varphi}{2} + S_1 \cos \varphi.$$

Nel vertice (3), la componente tangenziale della forza verticale $(p + q)$ risulta:

$$(p + q) \operatorname{sen} 3 \varphi;$$

e, stimata sul paradosso (3)(4) si riduce a

$$(p + q) \operatorname{sen} 3 \varphi \cos \frac{\varphi}{2},$$

aggiungendovi la compressione trasmessa dal paradosso precedente, stimata anche, secondo il paradosso che si considera, in

$$S_2 \cos \varphi,$$

avremo:

$$S_3 = (p + q) \operatorname{sen} 3\, \varphi \cos \frac{\varphi}{2} + S_2 \cos \varphi.$$

Senza procedere più oltre in questa analisi, è ormai evidente la legge di formazione della espressione della compressione sofferta da un paradosso qualunque di ordine n; essa può infatti rappresentarsi colla formula generale:

$$S_n = (p + q) \operatorname{sen} n\, \varphi \cos \frac{\varphi}{2} + S_{(n-1)} \cos \varphi.$$

Nel caso particolare nostro, al paradosso estremo spettando l' indice 6 avremo:

$$S_6 = (p + q) \operatorname{sen} 6\, \varphi \cos \frac{\varphi}{2} + S_5 \cos \varphi.$$

Quest' ultima forza rappresenta evidentemente, in direzione ed in intensità, l' azione che il poligono esteriore esercita sul piedritto.

Se questa forza si scompone pertanto nelle sue componenti verticale ed orizzontale, si otterranno i valori, che, stimati in direzione opposta, rappresenteranno le due forze P e Q, che costituiscono la reazione del piedritto, e servono a valutarne la stabilità, quando non si tien conto dell' effetto delle catene.

Se al vertice corrispondente all' imposta dell' arco si assegna l' indice m, si avrà evidentemente:

$$P = S_{(m-1)} \operatorname{sen} \left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$Q = S_{(m-1)} \cos \left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right).$$

V.

Spinta orizzontale alla chiave.

In tutti i valori, che siamo venuti ricavando, tutte le quantità comprese sono cognite, ad eccezione della forza H, che rappresenta la reazione della seconda mezza centina. Per determinarla ricorreremo alla equazione dei momenti.

Supponendo la rotazione intorno all' imposta dell' arco, avremo, da una parte, la forza incognita H, che tende a sollevare la mezza centina, e dall' altra, le forze $(p + q)$ applicate sui vertici, che vi si oppongono. Questi due sistemi di forze tendenti ad effetto contrario ed operanti con bracci di leva differenti, debbono, per l' equilibrio della Centina, neutralizzarsi, epperò deve essere adempiuta la equazione:

$$\begin{aligned} Hh = & (p+q)\, r \operatorname{sen} \Phi + (p+q)\, r (\operatorname{sen} \Phi - \operatorname{sen} \varphi) + \\ & + (p+q)\, r (\operatorname{sen} \Phi - \operatorname{sen} 2\varphi) + \dots\dots \\ & + (p+q)\, r (\operatorname{sen} \Phi - \operatorname{sen} n\varphi) + \dots\dots \\ & + (p+q)\, r (\operatorname{sen} \Phi - \operatorname{sen} (m-1)\varphi) \end{aligned}$$

e per conseguenza:

$$\begin{aligned} H = \frac{r}{h}(p+q) \Big\{ & \operatorname{sen} \Phi + (\operatorname{sen} \Phi - \operatorname{sen} \varphi) + (\operatorname{sen} \Phi - \operatorname{sen} 2\varphi) \\ & + (\operatorname{sen} \Phi - \operatorname{sen} n\varphi) + \dots\dots \\ & + (\operatorname{sen} \Phi - \operatorname{sen} (m-1)\varphi) \Big\} \end{aligned}$$

e finalmente:

$$\begin{aligned} H = \frac{r}{h}(p+q) \Big\{ & m. \operatorname{sen} \Phi - \operatorname{sen} \varphi - \operatorname{sen} 2\varphi - \operatorname{sen} 3\varphi \dots \\ & - \operatorname{sen} n\varphi - \dots\dots \\ & - \operatorname{sen} (m-1)\varphi \Big\}. \end{aligned}$$

VI.

Determinazione algebrica degli sforzi sulle saette.

Le componenti normali ai paradossi degli sforzi S_0, S_1, S_2,.... $S_{(m-1)}$, che abbiamo poc' anzi trasandato, riservandoci di tenerne parola, se ben si osserva, deviano dalla direzione delle saette, e siccome hanno direzione opposta a quella dello sforzo, che sulle saette esercitano le componenti dei pesi $(p+q)$ normali all' arco, vanno a sollievo di queste ultime.

La deviazione delle due forze è misurata dall' angolo $\frac{\varphi}{2}$; quest' angolo diminuisce col crescere del numero dei lati, e finisce a zero, quando il numero dei lati divenendo infinito, il poligono si confonde colla curva limite.

Chiamiamo K_0, K_1, K_2 ..... $K_{(m-1)}$ lo sforzo tramandato dal poligono esterno alle saette corrispondenti ai vertici (0), (1), (2), (3)........... $(m-1)$, ed avremo:

$$K_0 = (p+q) - H \operatorname{sen}\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2}$$

$$K_1 = (p+q) \cos\varphi - S_0 \operatorname{sen}\varphi \cos\frac{\varphi}{2}$$

$$K_2 = (p+q) \cos 2\varphi - S_1 \operatorname{sen}\varphi \cos\frac{\varphi}{2}$$

. . . .

$$K_{(m-1)} = (p+q) \cos(m-1)\varphi - S_{(m-2)} \operatorname{sen}\varphi \cos\frac{\varphi}{2}.$$

I risultati, a cui siamo venuti, per la parte superiore della mezza Centina, che abbiamo considerata, ognun vede che si otterrebbero conformi per l' altra

mezza Centina; possiamo quindi dire di conoscere gli sforzi che si sviluppano nel poligono superiore, e che dal poligono superiore si trasmettono alle saette.

VII.

Determinazione algebrica degli sforzi sulle catene.

Dobbiamo ora esaminare quel che avviene nel poligono interiore.

Per poco che si rifletta, è evidente che nello studiare questo secondo poligono, noi possiamo fare interamente astrazione dal primo, poichè di esso tengono luogo le forze K, che abbiamo precedentemente appreso a determinare; or questo poligono sollecitato, nei suoi vertici, dalle forze che gli sono trasmesse dalle saette, raccomandato, per i due estremi, ai piedi del poligono superiore, è un vero poligono funicolare, fisso alle due estremità e sollecitato dalle dette forze, alle quali reagisce la risultante delle azioni sviluppate dalla materia, onde sono costituiti i suoi lati.

È pure evidente, che per la simmetria del sistema, le tensioni delle catene omologhe sono identiche; per cui basta sottoporre a calcolo quelle di una mezza Centina.

Ma è da osservare che, per la eccentricità dei due archi di circolo, limiti dei poligoni superiore ed inferiore della Centina, la direzione delle saette, normale all' arco superiore, non lo è più al secondo, ma vi fa un angolo, che decresce, dall' imposta

della Centina, dove è massimo, al colmo, dove esso è nullo, le due normali confondendosi in una sola. (V. Tav.ª Iª, fig.ª 3ª.)

Se si chiama Ψ l' angolo al centro del mezz'arco inferiore della Centina, e si chiamano ψ_0, ψ_1, ψ_2,... $\psi_{(m-1)}$ gli angoli corrispondenti agli archi sottesi dai lati successivi del poligono interiore, misurati tutti a partire dal raggio verticale: l'angolo compreso fra le due normali alle due curve, in corrispondenza di un medesimo vertice, sarà rispettivamente dato

per il vertice (1_1), da $(\varphi - \psi_0)$
per il vertice (2_1), da $(2\,\varphi - \psi_1)$
per il vertice (3_1), da $(3\,\varphi - \psi_2)$
. . . .
per il vertice $(m-1)$, da $\left((m-1)\varphi - \psi_{(m-2)}\right)$.

Scomponendo pertanto gli sforzi trasmessi da ciascuna saetta in due: l' uno secondo la tangente, l' altro secondo la normale all' arco interiore; queste ultime componenti rappresenteranno effettivamente lo sforzo trasmesso al poligono inferiore, e contro al quale deve reagire, con sforzo eguale e contrario, la resistenza delle catene della Centina. Avremo adunque evidentemente, quando questi sforzi si chiamino rispettivamente: F_0, F_1, F_2, F_3 .... $F_{(m-1)}$:

$$F_0 = K_0$$
$$F_1 = K_1 \cos(\varphi - \psi_0)$$
$$F_2 = K_2 \cos(2\,\varphi - \psi_1)$$
$$F_3 = K_3 \cos(3\,\varphi - \psi_2)$$
. . . .
$$F_{(m-1)} = K_{(m-1)} \cos\left((m-1)\,\varphi - \psi_{(m-2)}\right).$$

Diciamo T_0, T_1, T_2 .... $T_{(m-1)}$ le tensioni rispettive delle catene, a partire dal vertice supremo procedendo all'imposta; scomponiamo le forze F_0, F_1, F_2 .... $F_{(m-1)}$ in due altre secondo i lati contigui a ciascun vertice, ed avremo le relazioni:

$$T_0 = F_0 \frac{\cos \frac{1}{2} \psi_0}{\operatorname{sen} \psi_0}$$

$$T_1 = F_1 \frac{\cos \frac{1}{2} \psi_0}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \psi_1}$$

$$T_2 = F_2 \frac{\cos \frac{1}{2} (\psi_1 - \psi_0)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\psi_2 - \psi_0)}$$

$$T_3 = F_3 \frac{\cos \frac{1}{2} (\psi_2 - \psi_1)}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\psi_3 - \psi_1)}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$T_{(m-1)} = F_{(m-1)} \frac{\cos \frac{1}{2} (\psi_{(m-2)} - \psi_{(m-3)})}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\psi_{(m-1)} - \psi_{(m-3)})};$$

le quali ci danno il valore dello sforzo subìto da ciascun tirante.

VIII.

Determinazione algebrica degli sforzi sulle crociere, agl' incontri delle saette coi puntoni.

Nella ricerca della tensione subìta dalle catene, noi abbiamo fatto due scomposizioni di forze; la prima ci ha dato il sistema delle forze F: la seconda il sistema delle forze T; ma questi due sistemi, presi individualmente, non rappresentano che una sola delle componenti derivanti dalle fatte scomposizioni.

Avanza ancora, dalla scomposizione delle forze K, il sistema delle componenti tangenziali; come, dalla

scomposizione delle forze F, il sistema delle componenti secondo il lato contiguo a quello, di cui il valore corrispondente T determina lo sforzo.

Questi due sistemi di componenti non possono restare senza produrre un qualche effetto, e questo effetto non è difficile riconoscere, che si consuma nel tendere a far rotare le saette intorno al loro punto d' innesto col poligono superiore, deviandole dalla posizione, loro inizialmente assegnata, normale all' arco circoscritto a quel poligono.

Ora, ad impedire una tal rotazione, stà nella Centina d' Arezzo, oltre all' incastro a dente della saetta, un doppio sistema di crociere di ferro, che coi loro bracci assicurano, sulle due faccie opposte della Centina, i puntoni gli uni agli altri, e le saette ai puntoni, in guisa da rendere la posizione rispettiva dei tre pezzi concorrenti in un medesimo vertice, per quanto possibile, invariabile.

Cominciando a considerare le componenti tangenziali delle forze K, e designandole rispettivamente colle lettere U_0, U_1, U_2 ..... $U_{(m-1)}$ si avrà:

$$U_0 = o$$
$$U_1 = K_1 \text{ sen } (\varphi - \psi_0)$$
$$U_2 = K_2 \text{ sen } (2\varphi - \psi_1)$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$U_{(m-1)} = K_{(m-1)} \text{ sen } \Big((m-1)\ \varphi - \psi_{(m-2)}\Big).$$

Passando alle componenti delle forze F secondo i lati del poligono interiore, giova cominciarne l' esame dal vertice più vicino all' imposta, che nel caso della Centina d' Arezzo, è quello che porta il nu-

mero (6_1). Quivi la scomposizione della forza F_6 secondo i due lati contigui del poligono (V. Tav.ª IIIª, fig. 1ª), produce la forza T_6 nella dirittura del lato $\overline{(7)(6_1)}$, ed un'altra forza nella dirittura del lato $\overline{(6_1)(5_1)}$, che sarebbe uguale in valore alla T_6, se il poligono fosse perfettamente regolare e la forza F_6 nella direzione della bisettrice dell'angolo dei due lati, ma che ciò non essendo, avrà un valore diverso, che rappresenteremo con $T_{\prime 6}$.

La forza T_6, come abbiamo veduto, misura lo sforzo del primo tirante, a partire dall'imposta, e, se questo ha dimensioni sufficienti per resistervi stabilmente, non ha alcun effetto sulla saetta.

La forza $T_{\prime 6}$, che è diretta secondo il lato successivo del poligono, misurerebbe lo sforzo del secondo tirante, se questo non fosse già determinato dalla forza T_5; le due forze $T_{\prime 6}$ e T_5, considerate rispetto alla saetta corrispondente, si eliderebbero se fossero eguali; non essendolo, la loro differenza $(T_{\prime 6} - T_5)$ andrà evidentemente a far risentire il suo effetto sulla saetta stessa.

Ma osserviamo, che questa forza $(T_{\prime 6} - T_5)$ riesce inclinata alla direzione della saetta di un angolo:

$$\theta_6 = 90^\circ - \tfrac{1}{2}(\psi_5 - \psi_4) - (6\varphi - \psi_5)$$
$$= 90^\circ - \left\{ 6\varphi - \tfrac{1}{2}(\psi_5 + \psi_4) \right\}.$$

Scomponendola in due: l'una, secondo la direzione della saetta, l'altra, secondo la normale, la prima si aggiungerà alla forza K_6 nel senso di comprimere la saetta; l'altra tenderà a far rotare la saetta, in-

torno al suo incastro, epperò si aggiungerà alla forza U_6.

Designando la prima con $K_{,6}$, la seconda con $U_{,6}$ si avrà:

$$K_{,6} = (T_{,6} - T_5)\ \text{sen}\left\{6\varphi - \tfrac{1}{2}(\psi_5 + \psi_4)\right\},$$

$$U_{,6} = (T_{,6} - T_5)\ \cos\left\{6\varphi - \tfrac{1}{2}(\psi_5 + \psi_4)\right\}.$$

È ovvio di qui desumere il valore generale delle forze $K_{,n}$ ed $U_{,n}$ competenti ad una saetta qualunque d' ordine *n*.

Esso sarebbe manifestamente:

$$K_{,n} = (T_{,n} - T_{(n-1)})\ \text{sen}\left\{n\varphi - \tfrac{1}{2}(\psi_{(n-1)} + \psi_{(n-2)})\right\}$$

$$U_{,n} = (T_{,n} - T_{(n-1)})\ \cos\left\{n\varphi - \tfrac{1}{2}(\psi_{(n-1)} + \psi_{(n-2)})\right\}.$$

Il braccio di leva, con cui le forze U ed $U_,$ operano, misurato com' è dalla lunghezza rispettiva delle saette, varia dal colmo dell' arco all' imposta; è massimo al colmo, ed è misurato dalla distanza dei due archi: diminuisce, procedendo verso l' imposta, come diminuisce la lunghezza delle saette.

Per determinare lo sforzo subìto dai bracci delle crociere, che sono poste a contrastare il movimento rotatorio delle saette, non avremo che da stabilire l' equazione d' equilibrio tra le forze U ed $U_,$, da una parte, e le forze molecolari sviluppate dal braccio delle due crociere opposte, dall' altra. Dicendo pertanto:

R_n lo sforzo subìto dal braccio raddoppiato di una crociera nella saetta d' ordine *n*,

I il momento d' inerzia della sezione resistente,

$2v$ la dimensione del braccio nella direzione del movimento,

l_n la lunghezza della saetta,

si avrà l'equazione:

$$\frac{R_n I}{v} = (U_n + U_{,n})\, l_n ;$$

dalla quale si ricaverà:

$$R_n = \frac{v\, l_n}{I} (U_n + U_{,n}).$$

È però da notare, che si ha ancora in aiuto della resistenza, quella che proviene dal dente d'incastro della saetta, e dalle dimensioni trasversali della sua sezione d'appoggio contro ai puntoni, le cui fibre non permettono la rotazione, se prima non sono fiaccate in guisa, che siano ridotti a superficie cilindrica i piani d'appoggio sui medesimi.

IX.

Considerazioni sugli sforzi, che si esercitano contemporaneamente, sull'estremo puntone.

Quando lo sforzo, che si esercita sull'ultimo tirante $T_{(m-1)}$, si scomponga in due forze, l'una verticale, l'altra orizzontale; le due componenti, che chiameremo P' e Q', verranno a modificare il valore delle due componenti P e Q dello sforzo $S_{(m-1)}$, che il paradosso esercita sul piedritto, e quindi la reazione del piedritto.

Se lo sforzo $T_{(m-1)}$ è di medesimo segno, che lo sforzo $S_{(m-1)}$, i due sistemi di componenti, operando contemporaneamente, sembra a prima giunta, che

si abbiano a sommare due a due: le verticali tra loro, le orizzontali tra loro. — Se sono di segno contrario (come dovrebbe essere, perchè la catena facesse l' uffizio, al quale è destinata), la modificazione della risultante ultima sul piedritto, sembra invece, che si avesse a fare per via di sottrazione.

Ciò si verifica di fatto tra le componenti orizzontali, crescendo la spinta o diminuendo, in ragione del valore positivo o negativo di Q′, fino ad elidersi completamente fra di loro, quando Q′ essendo negativa, risulta nello stesso tempo eguale a Q.

Ma lo stesso non può dirsi che avvenga per le componenti verticali, e ciò si desume dalla considerazione, che la reazione verticale del piedritto è costante, qualunque sia il sistema di centina, ed uguale sempre, nè più, nè meno, che al peso che vi sovrincombe.

Dove adunque s' impiega questa componente verticale P′ ? — Evidentemente essa non può stare senza produrre un qualche effetto. — Scrutando quale possa essere, non si tarderà a riconoscere, che la forza P′, reagendo di paradosso in paradosso, dall' imposta alla chiave, andrà colà ad elidersi, cospirando a crescere il valore della reazione delle due mezze centine, che noi abbiamo rappresentato con H.

Bisognerebbe adunque, per essere esattissimi, ripigliare il valore di H, ed introdurvi la considerazione di questa nuova forza P′, di cui prima non presentivamo l' esistenza.

Egli è evidente, che così operando, noi dovremmo ricalcolare i valori dei vari gruppi di sforzi S, K, F, T; noi troveremmo dei nuovi valori per P e per Q; ma questi genererebbero nuovi valori di H sempre crescenti. La loro considerazione ci condurrebbe a risultati, di volta in volta, maggiori; ma noi non potremmo arrivare mai alla espressione ultima dei valori degli sforzi cercati, poichè evidentemente noi ci aggireremmo, in questa ricerca, in un circolo senza uscita, il più perfetto simbolo dell' infinito.

Tuttavia, a chi si addentri un po' in questo esame, non può sfuggire questa considerazione: — Come avviene egli, che essendo la reazione verticale dell' appoggio, finita, costante ed uguale alla somma dei pesi, che esso direttamente sorregge, si possano avere valori diversi di H, che portano a valori differenti di $S_{(m-1)}$ e di $T_{(m-1)}$, onde poi si generano valori nuovi e ognora crescenti per la reazione verticale anzidetta?

La quistione è, di fatto, fondata; ma la spiegazione si troverebbe ovvia, quando in tutta questa successione di valori di $T_{(m-1)}$ e di $S_{(m-1)}$, e quindi di P, si verificasse un incremento piccolissimo, cosicchè la somma dei pesi sovrincombente all' appoggio fosse il limite estremo dei valori, che verrebbe ad assumere la reazione verticale del medesimo.

In questa ipotesi tutti i valori di S, K, T, P e Q, basati sul primo valore di H, sarebbero tutti inferiori al valore reale, e la differenza che si riscon-

trerebbe, nel calcolo dei casi particolari, tra il valore della componente P dedotto dalla formula, e il peso reale sovrincombente all' appoggio, darebbe la misura del massimo dell' errore, che si commetterebbe nel calcolo, assumendo quel primo valore di H.

Ma non potrebbe egli avvenire che il valore di P, a cui si giungesse, tenendo conto dello accumularsi degli anzidetti incrementi, superasse effettivamente il limite, nel quale questa reazione, per la forza delle cose, si trova necessariamente circoscritta, cioè la somma dei pesi che gravitano sul piedritto?

Questa domanda può parere, a prima giunta, sofistica, inquantochè verificandosi una tale ipotesi, il calcolo ci condurrebbe ad un assurdo. Ma riflettendo come l' assurdità di un risultato accenni, il più delle volte, ad un qualche difetto nelle condizioni del problema, giova riandare il processo del calcolo, e ripensare ai termini, nei quali esso fu posto.

Or che cosa noi abbiamo fatto in sul bel principio del nostro Studio? Non abbiamo noi ridotto il sistema a semplici linee matematiche, resistenti sì, ma prive delle dimensioni trasversali, e, quel che è più, delle qualità che sono indivisibili dalla materia, cioè la compressibilità, la estensibilità, la flessibilità?

Quando s' introducessero nel computo queste qualità, che necessariamente neutralizzano una porzione degli sforzi che si esercitano, e si rimandano

da una parte all' altra del sistema, noi troveremmo l' effetto, nel quale questa forza P' residua tende a consumarsi, e questo effetto vedremmo risolversi nella tendenza a deformare il sistema, e più particolarmente nella compressione dei puntoni; compressione, che si aggiunge a quella, che sui medesimi già esercitano le forze direttamente applicatevi, e che abbiamo espresso con $S_{(m-1)}$, $S_{(m-2)}$.......... S_0.

Ma vi ha di più. — Noi abbiamo supposto il nostro sistema, oltre che ridotto a semplici linee materiali, inestensibili, inflessibili, incompressibili, noi lo abbiamo implicitamente supposto perfettamente articolato in tutti i punti, in cui le sue parti s' incontrano; facendo assolutamente astrazione da ogni resistenza passiva, che si potesse, per avventura, sviluppare nelle articolazioni. — Ora non solamente il sistema nostro non è articolato, e per conseguenza non suscettivo ogni singolo suo elemento di rotare liberamente intorno al suo punto d' incontro coll' elemento vicino, per prendere la posizione d' equilibrio, che per l' azione delle forze estrinseche gli converrebbe; ma ogni movimento è anzi possibilmente impedito dall' azione di quelle crociere di ferro, che abbiamo veduto raccomandare le saette al sistema dei puntoni, e che, nello stesso tempo, hanno per iscopo di tenere i puntoni gli uni agli altri fissati, nella posizione loro inizialmente assegnata.

La forza P' quindi avrà per effetto, oltre che di crescere, come già abbiamo detto, la compressione S dei puntoni, di far forza, colla componente nor-

male, sui bracci delle crociere anzidette, che assicurano i puntoni gli uni agli altri, tendendo a farli rotare intorno alla sezione di giunto per metterli nella posizione d' equilibrio.

Quindi, se noi designiamo colla lettera S′, contraddistinta dall' indice che compete a ciascun puntone, il sistema delle forze, che è ai puntoni trasmesso dalla forza P′, la quale rappresenta la reazione delle catene, possiamo ritenere, che le componenti normali di queste forze S′ (le quali andrebbero, ove il sistema fosse perfettamente articolato, a crescere la parte negativa dei valori degli sforzi K, e per immediata conseguenza si risolverebbero in un aumento degli sforzi T) non escano dal campo del poligono superiore, e che in esso completamente si esauriscano nella tendenza, che abbiamo detto, a far rotare i puntoni gli uni sugli altri, se la resistenza dei ferri posti ad irrigidire le giunzioni dei medesimi, è superiore all' azione della componente normale, competente al giunto che si considera.

È adunque da vedere, se questi ferri si trovano in grado di reggere a questi sforzi; — quando lo siano, noi potremo definitivamente affermare, che le tensioni T delle catene, che noi abbiamo ottenute nel primo calcolo, partendo dall'ipotesi, che il sistema perfettamente articolato permettesse la integrale trasmissione degli sforzi K, dal poligono superiore al poligono inferiore, sono anche superiori al vero, e quindi ne desumeremo una maggior conferma della stabilità della Centina.

Di queste componenti normali noi conosciamo

l' intensità, ma per calcolare l' effetto, onde sono capaci, sarebbe mestieri conoscere il loro punto d'applicazione; or questo completamente ignoriamo, ricadendo qui manifestamente nella identica difficoltà, finora insormontata, che s' incontra nella Teoria delle Volte, quando considerando l' azione reciproca di due cunei successivi, si cerca la legge di ripartizione degli sforzi, che essi si trasmettono.

Ma se noi ignoriamo il punto d' applicazione di questa forza, che tende a far girare un puntone sull' altro, noi possiamo però vedere, che il braccio di leva, con cui essa opera, non può essere che piccolissimo, per cui, anche quando l' intensità sua sia di qualche riguardo, il suo momento non potrà essere che assai piccolo. Possiamo adunque argomentare, che il braccio delle doppie crociere, e la difficoltà, che oppongono alla rotazione le fibre della sezione di giunto, che da piana che è, dovrebbe essere ridotta a cilindrica, per rendere possibile la rotazione, potranno facilmente avere un momento di resistenza assai superiore.

Queste argomentazioni, che si desumono dalle particolari condizioni di struttura della Centina d' Arezzo, sono confermate dalle lievissime deformazioni, che vi ha subìto il sistema dei puntoni.

Possiamo adunque conchiudere, che in quelle centine, la forza P′ ha solo azione sul poligono superiore: che in questo completamente si esaurisce, senza che le tensioni delle catene, quali furono calcolate, possano esserne accresciute.

X.

Determinazione algebrica degli sforzi, che la reazione delle catene produce in un sistema più o meno perfettamente articolato, composto di parti più o meno rigide.

Che se volessimo renderci ragione dell' aumento di sforzo, che subirebbero, per la reazione delle catene, le varie parti di un sistema poligonale, quando esso essendo più o meno rigido nei suoi elementi, più o meno perfettamente articolato nei giunti, l' effetto della forza P′ si propagasse, dai puntoni alle saette, e da queste alle catene, noi non avremmo, che prendere il valore della componente di P′, stimata secondo il puntone estremo, la quale per le notazioni adottate risulta $S'_{(m-1)}$, e determinatala, dedurre da essa tutta la serie dei valori S′.

Noi avremmo così:

$$S'_{(m-2)} = S'_{(m-1)} \cos \varphi$$

$$S'_{(m-3)} = S'_{(m-2)} \cos \varphi$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S'_0 = S'_1 \cos \varphi,$$

e chiamando H′ l' aumento di reazione della seconda mezza centina, dovuto alla medesima cagione,

$$H' = S'_0 \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Prendendo poi a considerare le componenti normali, e chiamando K'_0, K'_1 .... $K'_{(m-1)}$ i nuovi valori

degli sforzi trasmessi dal poligono superiore alle saette, avremmo evidentemente:

$$K'_0 = (p+q) - (H + H') \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$K'_1 = (p+q) \cos \varphi - (S_0 + S'_0) \operatorname{sen} \varphi \cos \frac{\varphi}{2}$$

$$K'_2 = (p+q) \cos 2\varphi - (S_1 + S'_1) \operatorname{sen} \varphi \cos \frac{\varphi}{2}$$

. . . .

$$K'_{(m-1)} = (p+q) \cos (m-1) \varphi - (S_{(m-2)} + S'_{(m-2)}) \operatorname{sen} \varphi \cos \frac{\varphi}{2}.$$

Designando finalmente con T'_0, T'_1 .... $T'_{(m-1)}$ i nuovi valori delle tensioni delle catene, avremmo:

$$T'_0 = K'_0 \frac{\cos \frac{1}{2} \psi_0}{\operatorname{sen} \psi_0}$$

$$T'_1 = K'_1 \cos (\varphi - \psi_0) \frac{\cos \frac{1}{2} \psi_0}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} \psi_1}$$

. . . .

$$T'_{(m-1)} = K'_{(m-1)} \cos \left\{ (m-1) \varphi - \psi_{(m-2)} \right\} \frac{\cos \frac{1}{2} (\psi_{(m-2)} - \psi_{(m-3)})}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\psi_{(m-1)} - \psi_{(m-3)})},$$

Questo secondo valore $T'_{(m-1)}$ della tensione del tirante estremo, maggiore del primo, genererebbe un nuovo valore P″, da cui deriverebbero nuovi valori S″, H″, K″ e T″, e così successivamente procedendo, si arriverebbe a quel valore più approssimato, che si volesse, degli sforzi subìti dalle singole parti del sistema, secondo la minore o maggiore loro rigidezza, secondo la minore o maggiore perfezione delle loro articolazioni.

XI.

Determinazione algebrica degli sforzi sui piedritti e sull' estremo puntone.

Ma ripigliamo a considerare il caso di un sistema, in cui, come nella Centina d'Arezzo, le giunzioni delle varie parti, anzichè bene articolate, siano irrigidite con speciale artifizio, sicchè la tensione delle catene non produca il suo effetto al di fuori del poligono superiore.

Noi abbiamo già accennato, sul cominciare del Capitolo IX, come tale tensione riesca a modificare il valore della reazione del piedritto, e modifichi il valore della compressione subìta dall' estremo puntone, che è il più affaticato.

È mestieri stabilire algebricamente l' importanza di queste modificazioni. Perciò determiniamo il valore delle due componenti orizzontale e verticale della tensione $T_{(m-1)}$.

La componente orizzontale, come già abbiamo osservato, va ad alleviare lo sforzo che la Centina esercita contro il piedritto; la componente verticale, scomposta a sua volta in due, l' una secondo la normale, l' altra secondo la direzione del puntone estremo della Centina, dà nella prima, una forza tendente a sollevare l' estremità inferiore del puntone, e quindi una forza, che in parte neutralizza l' effetto dalla componente orizzontale di $T_{(m-1)}$; dà nella seconda, la forza di compressione $S'_{(m-1)}$ che è da aggiungersi alla $S_{(m-1)}$, e da tenersi a calcolo

nel computo della stabilità del sistema, poichè in alcun caso potrà acquistare un valore assai ragguardevole.

Scomponendo pertanto la forza $T_{(m-1)}$ in due: l'una verticale, l'altra orizzontale, e chiamandole, come già abbiamo fatto, P' e Q', se si ponga:

$$\psi_{(m-1)} - \psi_{(m-2)} = \psi$$

avremo evidentemente:

$$P' = T_{(m-1)} \operatorname{sen}\left(\Psi - \frac{\psi}{2}\right),$$

$$Q' = T_{(m-1)} \cos\left(\Psi - \frac{\psi}{2}\right).$$

Scomponendo ora di bel nuovo la P' in due altre forze: l'una, secondo il puntone estremo, ed è quella che già abbiamo designata con $S'_{(m-1)}$; l'altra, secondo la normale al medesimo, che designeremo con N, avremo:

$$S'_{(m-1)} = P' \operatorname{sen}\left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right),$$

$$N = P' \cos\left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right);$$

e conseguentemente:

$$S'_{(m-1)} = T_{(m-1)} \operatorname{sen}\left(\Psi - \frac{\psi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right)$$

$$N = T_{(m-1)} \operatorname{sen}\left(\Psi - \frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Trascurando di ridurre all'orizzonte la forza N, ciò che non farà che crescere la stabilità, avremo

finalmente, a misura della spinta orizzontale sul piedritto, l' espressione:

$$Q = S_{(m-1)} \cos\left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right) - Q' + N.$$

e quindi:

$$(a) \quad Q = S_{(m-1)} \cos\left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right) -$$

$$- T_{(m-1)}\left\{\cos\left(\Psi - \frac{\psi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\Psi - \frac{\psi}{2}\right) \cos\left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right)\right\}.$$

Chiamando Z la compressione subìta dall' estremo puntone, che è quello soggetto alla massima fatica, sarà:

$$Z = S_{(m-1)} + S'_{(m-1)}$$

cioè:

$$Z = S_{(m-1)} + P' \operatorname{sen}\left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right)$$

e finalmente:

$$(b) \quad Z = S_{(m-1)} + T_{(m-1)} \operatorname{sen}\left(\Psi - \frac{\psi}{2}\right) \operatorname{sen}\left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right).$$

Quanto al valore della reazione verticale del piedritto, essa rimane quale l' abbiamo già determinata sul finire del Capitolo IV, vale a dire,

$$(c) \quad P = S_{(m-1)} \operatorname{sen}\left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right)$$

poichè in essa non può avere influenza la tensione delle catene.

Essa, d' altra parte, è indipendente dalla forma della Centina e dalla distribuzione dei carichi, ed è,

in ogni caso, eguale alla loro somma. Quindi anzichè dalla formula precedente, può con maggiore esattezza ricavarsi, partendo da tale considerazione, ed esprimersi con

$$P = m\,(p + q).$$

Quindi se si sostituisse questo valore nella equazione (c), se ne potrebbe dedurre:

$$S_{(m-1)} = \frac{m\,(p+q)}{\operatorname{sen}\left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

e tale valore ponendo nelle equazioni (a) e (b), si avrebbe più esattamente:

$$Q = m\,(p+q)\cot\left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right) -$$

$$- T_{(m-1)}\left\{\cos\left(\Psi - \frac{\psi}{2}\right) - \operatorname{sen}\left(\Psi - \frac{\psi}{2}\right)\cos\left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right)\right\}.$$

$$Z = \frac{m\,(p+q)}{\operatorname{sen}\left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right)} + T_{(m-1)}\operatorname{sen}\left(\Psi - \frac{\psi}{2}\right)\operatorname{sen}\left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right).$$

XII.

Determinazione algebrica degli angoli ψ.

Abbiamo, con ciò, data ragione del generarsi delle reazioni rispettive nelle singole parti della Centina, secondo il tipo adottato nella Stazione di Arezzo, ed abbiamo appreso a determinarne la intensità e la direzione con espressioni algebriche; non rimane ora più che sostituire, alle quantità letterali, le quantità numeriche relative al caso nostro.

Procedendo in questa sostituzione col debito

ordine, riprenderemo, uno per uno, i vari sistemi di sforzi, e di ciascuno sforzo ricercheremo il valore individuale per confrontarlo con quello, che la materia, onde sono costituite le varie parti della nostra Centina, e le rispettive dimensioni, permetterebbero di fare stabilmente sopportare; dal confronto poi dei due risultati desumeremo le condizioni attuali di stabilità della Centina, che è oggetto precipuo di questo Studio.

Ma prima di metterci nei calcoli numerici, osserviamo che vi ha ancora tra le quantità comprese nelle formule precedentemente ricavate, una serie di valori che sono tuttavia da determinare, e questi sono i valori degli angoli ψ.

Per trovare questi valori giova considerare i due settori formati dagli angoli φ e ψ corrispondenti ad un vertice qualunque M del poligono interno (V. Tav. I^a, fig. 4^a).

Dal triangolo OO'M, intercettato fra i due raggi che mettono al punto M, si ricava:

$$\frac{\overline{OO'}}{\overline{O'M}} = \frac{\text{sen}\,(\varphi - \psi)}{\text{sen}\,\varphi}$$

ma, se si chiama a la distanza alla chiave dei due archi, si ha:

$$\overline{OO'} = r' + a - r$$

d' altra parte

$$\overline{O'M} = r'$$

dunque

$$\text{sen}\,(\varphi - \psi) = \frac{r' + a - r}{r'}\,\text{sen}\,\varphi.$$

Ponendo

$$\frac{r' + a - r}{r'} = \delta$$

e sviluppando il valore di sen ($\varphi - \psi$) viene:

$$\text{sen}\,\varphi \cos\psi - \cos\varphi\,\text{sen}\,\psi = \delta\,\text{sen}\,\varphi,$$

dividendo per sen φ, e sostituendo per cos ψ il suo valore in funzione del seno:

$$\sqrt{1 - \text{sen}^2\psi} = \delta + \cot\varphi\,\text{sen}\,\psi;$$

elevando al quadrato i due membri, ed ordinando per rispetto a sen ψ,

$$\text{sen}^2\psi + \frac{2\,\delta \cot\varphi}{1+\cot^2\varphi}\,\text{sen}\,\psi + \frac{\delta^2 - 1}{1+\cot^2\varphi} = 0.$$

Risolvendo infine quest' equazione si ricava:

$$\text{sen}\,\psi = -\frac{\delta \cot\varphi}{1+\cot^2\varphi} + \sqrt{\left(\frac{\delta\cot\varphi}{1+\cot^2\varphi}\right)^2 - \frac{\delta^2 - 1}{1+\cot^2\varphi}}$$

ovvero

$$\text{sen}\,\psi = \frac{\delta\cot\varphi}{1+\cot^2\varphi}\left\{\sqrt{\frac{1+\cot^2\varphi - \delta^2}{\delta^2\cot^2\varphi}} - 1\right\}$$

che si riduce a:

$$\text{sen}\,\psi = \frac{1}{1+\cot^2\varphi}\left\{\sqrt{1+\cot^2\varphi - \delta^2} - \delta\cot\varphi\right\}$$

e finalmente a:

$$\text{sen}\,\psi = \text{sen}^2\varphi\left\{\sqrt{1+\cot^2\varphi - \delta^2} - \delta\cot\varphi\right\}.$$

XIII.

Grado di generalità delle formule stabilite.

Le formule, che abbiamo ricavato, sono generali e comprendono evidentemente tutti i sistemi poligonali articolati regolari di un numero pari di lati, che si possono inscrivere in un arco di circolo, a cominciare dal poligono, che ha il minimo numero di lati, sino all' arco stesso di circolo, che è il limite ultimo di tutti i poligoni inscritti.

È agevole vedere come esse possano, con tutta facilità, rendersi ancora più generali, ed estendersi ai casi dei poligoni comunque irregolari, variabili nel numero e nel peso proprio dei singoli lati e nei pesi accidentali, di cui possono essere gravati i loro vertici, purchè sempre inscritti in archi di circolo.

Per ciò basterà, nelle formule nostre, invece dei valori φ, 2φ, 3φ..... surrogare i valori diversi φ_0, φ_1, φ_2,.... che competono a quel poligono qualunque, che si ha da considerare, e tener conto delle modificazioni, che in conseguenza della diversa disposizione dei lati e del mutato valore rispettivo degli angoli dati, possono avvenire nei valori degli angoli dedotti; — invece della somma costante, $(p + q)$, che figura nei nostri calcoli, porre i valori, $(p_0 + q_0)$, $(p_1 + q_1)$, $(p_2 + q_2)$.... rappresentanti i pesi varii, che si suppongono concentrati nei vertici (0), (1), (2) ec. del poligono stesso. — Di tal guisa le formule, che si otterranno, abbraccieranno tutti i poligoni indistintamente inscrivibili in un arco di circolo, e da-

ranno gli sforzi delle singole loro parti, qualunque sia la variazione del loro peso proprio e qualunque sia la legge di ripartizione dei sovraccarichi, che in ciascun caso particolare accadrà di considerare.

Nè è da ommettere, che tali nuove formule, (come quelle più semplici, che noi abbiamo ricavate nell' ipotesi, che più generalmente accade di considerare, di regolarità di forma e di uniforme ripartizione di carichi, fatta solo eccezione pel maggior carico supposto al colmo) sono suscettive di essere semplificate, colla considerazione, che i seni degli archi assai piccoli si confondono colle lunghezze degli archi stessi, e quindi possono, da queste, essere surrogati, e che i rispettivi coseni possono ritenersi eguali all' unità.

Laonde, in ogni caso particolare, fatto il calcolo degli angoli, che entrano nella composizione delle formule, si surrogheranno ai seni e coseni di quegli archi, che risulteranno minimi, per i primi, le lunghezze degli archi, per i secondi, l' unità; e il limite, in questa sostituzione, sarà dato dal grado di esattezza, che si vorrà conseguire nei risultati.

La generalità di queste formule trova un' utile applicazione nella Pratica delle Costruzioni, in quanto che è facile vedere, che, oltre al caso delle centine dei grandi tetti, il sistema poligonale articolato, che ha formato oggetto del nostro studio, ha una larga applicazione nelle armature di sbalzo dei grandi archi di ponte, le quali appunto si trovano, per la massima parte, nella condizione di poligoni più o meno regolari, inscritti in archi di circolo.

Del rimanente, il processo di calcolo adottato per il caso dei poligoni, che hanno per direttrice la curva circolare, può servire di guida per tutti gli altri poligoni; le formule cambieranno di forma, ma le considerazioni generali, che abbiamo esposte, vi troveranno applicazione.

XIV.

Applicazione delle formule generali al caso particolare della Centina d'Arezzo.

Ma è ormai tempo, che si venga all' applicazione delle formule ricavate, al caso particolare della centina della Tettoia d' Arezzo.

I dati si desumono dal Progetto approvato dal Governo, il quale solo si ebbe in comunicazione, e sul quale, con tutta probabilità, sono stati instituiti i calcoli che condussero all'ordine di demolizione.

Essi sono i seguenti:

		metri
Corda delle centine	=	28, 00
Saetta dell' arco superiore	=	10, 50
» dell' arco inferiore	=	8, 60
Intervallo delle centine	=	5, 50

Da questi dati si ricavano i seguenti:

		metri
Raggio dell' arco superiore r	=	14, 58
» dell' arco inferiore r'	=	15, 69

Mezz' angolo al centro dell' arco superiore $\Phi = 73.° 47.' 05.''$

» dell' arco inferiore $\Psi = 63.° \; 9.' \, 44.''$

Angoli, sul raggio verticale, dei raggi condotti a ciascun vertice del poligono superiore:

$$\varphi = 10.^\circ\ 32.'\ 26.''$$
$$2\ \varphi = 21.^\circ\ 04.'\ 53.''$$
$$3\ \varphi = 31.^\circ\ 37.'\ 19.''$$
$$4\ \varphi = 42.^\circ\ 09.'\ 46.''$$
$$5\ \varphi = 52.^\circ\ 42.'\ 12.''$$
$$6\ \varphi = 63.^\circ\ 14.'\ 39.''$$

Angoli, sul raggio verticale, dei raggi condotti a ciascun vertice del poligono inferiore:

$$\psi_0 = 8.^\circ\ 31.'\ 45.''$$
$$\psi_1 = 17.^\circ\ 05.'\ 00.''$$
$$\psi_2 = 25.^\circ\ 50.'\ 49.''$$
$$\psi_3 = 34.^\circ\ 45.'\ 46.''$$
$$\psi_4 = 43.^\circ\ 52.'\ 28.''$$
$$\psi_5 = 53.^\circ\ 22.'\ 35.''$$
$$\psi_6 = \Psi$$

Angoli che sono da considerare nel calcolo degli sforzi:

$$\frac{\varphi}{2} = 5.^\circ\ 16.'\ 13.''$$
$$\frac{\psi_0}{2} = 4.^\circ\ 15.'\ 53.''$$
$$\frac{\psi_1}{2} = 8.^\circ\ 32.'\ 30.''$$

$$(\varphi - \psi_0) = 2.^\circ\ 00.'\ 41.''$$
$$(2\ \varphi - \psi_1) = 3.^\circ\ 59.'\ 53.''$$
$$(3\ \varphi - \psi_2) = 5.^\circ\ 45.'\ 30.''$$
$$(4\ \varphi - \psi_3) = 7.^\circ\ 24.'\ 00.''$$
$$(5\ \varphi - \psi_4) = 8.^\circ\ 49.'\ 44.''$$
$$(6\ \varphi - \psi_5) = 9.^\circ\ 52.'\ 04.''$$

$\frac{1}{2}(\psi_1 - \psi_0) = 4.^\circ\ 16.'\ 38.''$

$\frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_0) = \ldots\ldots\ 8.^\circ\ 39.'\ 32.''$

$\frac{1}{2}(\psi_2 - \psi_1) = 4.^\circ\ 22.'\ 55.''$

$\frac{1}{2}(\psi_3 - \psi_1) = \ldots\ldots\ 8.^\circ\ 50.'\ 23.''$

$\frac{1}{2}(\psi_3 - \psi_2) = 4.^\circ\ 27.'\ 29.''$

$\frac{1}{2}(\psi_4 - \psi_2) = \ldots\ldots\ 9.^\circ\ 00.'\ 50.''$

$\frac{1}{2}(\psi_4 - \psi_3) = 4.^\circ\ 33.'\ 21.''$

$\frac{1}{2}(\psi_5 - \psi_3) = \ldots\ldots\ 9.^\circ\ 18.'\ 25.''$

$\frac{1}{2}(\psi_5 - \psi_4) = 4.^\circ\ 45'\ 04.''$

$\frac{1}{2}(\psi_6 - \psi_4) = \ldots\ldots\ 9.^\circ\ 38,'\ 38.''$

$$\left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right) = 68.^\circ\ 30.'\ 52.''$$

$$\left(\Psi - \frac{\psi}{2}\right) = 58.^\circ\ 16.'\ 09.''$$

Peso proprio di una Centina	Kilog.	3,390
» » della copertura soprastante.	»	3,052
Totale peso permanente.	Kilog.	6,442

I sovraccarichi accidentali, relativi al peso della neve ed all'azione del vento, si calcolano in ragione di cinquanta chilogrammi per metro quadrato di superficie coperta;

ciò dà per ogni Centina un totale di	Kilog.	7,700
che aggiunto al peso permanente di	»	6,442
porta il carico totale da considerarsi nel calcolo a.	Kilog.	14,142

Considerando questo peso ripartito uniformemente sui tredici vertici della Centina, ne viene per ciascun vertice il carico di 1088, che per maggior larghezza si porta a 1100 kilog.

Si ritiene adunque

$$(p+q)=1100.$$

Ripigliando ora, una per una, le formule, che si sono stabilite, esse si possono raccogliere nei seguenti quattro gruppi:

1° Gruppo.

Sforzi di compressione sui puntoni.

$$H=\frac{14,58}{10,50}\,1100\left\{7\,\text{sen}\,(78.^\circ\,47.'\,05.'')-\text{sen}\,(10.^\circ\,25.'\,36.'')-\text{sen}\,(21.^\circ\,4.'\,53.'')-\text{sen}\,(31.^\circ\,37.'\,19.'')-\text{sen}\,(42.^\circ\,9.'\,46.'')-\text{sen}\,(52.^\circ\,42.'\,12.'')-\text{sen}\,(63.^\circ\,14.'\,39.'').\right\}=5033\text{ kilog.}$$

$$S_0=5033\cos(5.^\circ\,16.'\,13.'')=5012\text{ kilog.}$$

$$S_1=1100\,\text{sen}\,(10.^\circ\,32.'\,26.'')\cos(5.^\circ\,16.'\,13.'')+5012\cos(10.^\circ\,32.'\,26.'')=5127\text{ kilog.}$$

$$S_2=1100\,\text{sen}\,(21.^\circ\,4.'\,53.'')\cos(5.^\circ\,16.'\,13.'')+5127\cos(10.^\circ\,32.'\,26,'')=5434\text{ kilog.}$$

$$S_3=1100\,\text{sen}\,(31.^\circ\,37.'\,19.'')\cos(5.^\circ\,16.'\,13.'')+5434\cos(10.^\circ\,32.'\,26.'')+5916\text{ kilog.}$$

$$S_4=1100\,\text{sen}\,(42.^\circ\,9.'\,46.'')\cos(5.^\circ\,16.'\,13.'')+5916\cos(10.^\circ\,32,'\,26.'')=6660\text{ kilog.}$$

$$S_5=1100\,\text{sen}\,(52.^\circ\,42.'\,12.'')\cos(5.^\circ\,16.'\,13.'')+6660\cos(10.^\circ\,32.'\,26.'')=7418\text{ kilog.}$$

$$S_6=1100\,\text{sen}\,(63.^\circ\,14.'\,39.'')\cos(5.^\circ\,16.'\,13.'')+7418\cos(10.^\circ\,32.'\,26.'')=8271\text{ kilog.}$$

2° Gruppo.

Sforzi sulle saette.

$K_0 = 1100 - 5033 \text{ sen } (5.^\circ 16.' 13.'') \cos (5.^\circ 16.' 13.'')$
$= 640$ kilog.

$K_1 = 1100 \cos (10.^\circ 32.' 26.'') - 5012 \text{ sen } (10.^\circ 32.' 26.'')$
$\times \cos (5.^\circ 16.' 13.'') = 168$ kilog.

$K_2 = 1100 \cos (21.^\circ 4.' 53.'') - 5127 \text{ sen } (10.^\circ 32.' 26.'')$
$\times \cos (5.^\circ 16.' 13.'') = 92$ kilog.

$K_3 = 1100 \cos (32.^\circ 37.' 19.'') - 5434 \text{ sen } (10.^\circ 32.' 26.'')$
$\times \cos (5.^\circ 16.' 13.'') = - 53$ kilog.

$K_4 = 1100 \cos (42.^\circ 9.' 46.'') - 5916 \text{ sen } (10.^\circ 32.' 26.'')$
$\times \cos (5.^\circ 16.' 13.'') = - 263$ kilog.

$K_5 = 1100 \cos (52.^\circ 42.' 12.'') - 6660 \text{ sen } (10.^\circ 32.' 26.'')$
$\times \cos (5.^\circ 16.' 13.'') = - 546$ kilog.

$K_6 = 1100 \cos (63.^\circ 14.' 39.'') - 7418. \text{ sen } (10.^\circ 32.' 26.'')$
$\times \cos (5.^\circ 16.' 13.'') = - 856$ kilog.

3° Gruppo.

Sforzi sulle catene.

$$T_0 = 640. \frac{\cos (4.^\circ 15.' 53.'')}{\text{sen } (8^\circ 31' 45'')} = 4291 \text{ kilog.}$$

$$T_1 = 168. \cos (2.^\circ 00.' 41.'') \frac{\cos (4.^\circ 15.' 53.'')}{\text{sen } (8.^\circ 32' 30'')} = 1127 \text{ kilog.}$$

$$T_2 = 92. \cos (3.^\circ 59.' 53.'') \frac{\cos (4.^\circ 16.' 38'')}{\text{sen } (8.^\circ 39.' 32'')} = 608 \text{ kilog.}$$

$$T_3 = - 53. \cos (5.^\circ 46' 30'') \frac{\cos (4.^\circ 22.' 55'')}{\text{sen } (8.^\circ 50' 23'')} = - 355 \text{ kilog.}$$

$$T_4 = -\,263.\ \cos\,(7.^\circ\,24.'\,00'')\,\frac{\cos\,(4.^\circ\,27.'\,29'')}{\text{sen}\,(9.^\circ\,00'\,50'')} = -\,1672\ \text{kil.}$$

$$T_5 = -\,546.\ \cos\,(8.^\circ\,49.'\,44'')\,\frac{\cos\,(4.^\circ\,33.'\,21'')}{\text{sen}\,(9.^\circ\,18.'\,25.'')} = -\,3326\ \text{kil.}$$

$$T_6 = -\,856.\ \cos\,(9.^\circ\,52.'\,04'')\,\frac{\cos\,(4.^\circ\,45.\,04.'')}{\text{sen}\,(9.^\circ\,38.\,38.'')} = -\,5017\ \text{kil.}$$

4° Gruppo.

Sforzi sui piedritti e reazione della tensione della catena sull' estremo puntone.

$$P = 7 \times 1100 = 7700\ \text{kilog.}$$

$$Q = 7700.\ \cot\,(68.^\circ\,30.'\,52.'') - 5017.\ \Big(\cos\,(58.^\circ\,16.'\,09.'') - \cos\,(68.^\circ\,30.'\,52.'') \times \text{sen}\,(58.^\circ\,16.'\,09.'')\Big) = 548\ \text{kil.}$$

$$Z = \frac{7700}{\text{sen}\,(68.^\circ\,30.'\,52.'')} + 5017\ \text{sen}\,(58.^\circ\,16.'\,09'') \times \text{sen}\,(68.^\circ\,30.'\,52.). = 12246\ \text{kilog.}$$

XV.

Discussione dei valori trovati e determinazione dei coefficienti di stabilità.

I valori trovati, che misurano gli sforzi assoluti che si esercitano sulle varie parti della Centina, nell' ipotesi assunta di entità e distribuzione di carichi, sono pur quelli che misurano gli sforzi reattivi, che le parti stesse sono rispettivamente cimentate ad opporre, in ragione della loro disposizione, delle loro dimensioni, e della qualità della materia, onde sono composte.

Per mettere a confronto queste due maniere di sforzi, giova raccogliere i valori trovati, in guisa che tutti quelli della medesima specie si possano abbracciare in un sol colpo d'occhio. Ciò si fa nella tabella, che segue:

Sforzi sui puntoni.	Sforzi sulle saette.	Sforzi sulle catene.
Kilog.	Kilog.	Kilog.
$S_0 = 5012$	$K_0 = +640$	$T_0 = +4291$
$S_1 = 5127$	$K_1 = +168$	$T_1 = +1127$
$S_2 = 5434$	$K_2 = +92$	$T_2 = +608$
$S_3 = 5916$	$K_3 = -53$	$T_3 = -355$
$S_4 = 6660$	$K_4 = -263$	$T_4 = -1672$
$S_5 = 7418$	$K_5 = -546$	$T_5 = -3326$
$S_6 = 8271$	$K_6 = -856$	$T_6 = -5017$

Cominciando a considerare la prima categoria di sforzi, cioè quella che riflette i puntoni, si vede a prima giunta, che i loro valori vanno progressivamente crescendo dalla chiave dell'arco all'imposta, dove si raggiunge il massimo di 8271 kilog.

La sezione dei puntoni essendo uniforme da un capo all'altro della Centina, basta, per la stabilità, riconoscere se lo sforzo massimo, che è sopportato dal puntone estremo, stia entro il limite, che la esperienza ha dimostrato non doversi oltrepassare, nell'impiego della qualità di legname, ond'esso è costituito.

Ora questo massimo è dato dal valore di Z, il quale, quando si tenga anche conto che il valore di S_6, partendo dalla reazione verticale nota del

piedritto, sale da 8271 kilog., che abbiamo sopra trovato, a 8275 kilog., riesce di kilog. 12,246.

È a questo sforzo adunque che deve reggere stabilmente il puntone.

La sua sezione essendo

$$30^{c} \times 25^{c.} = 750^{c.q.}$$

lo sforzo di compressione subìto, risulta per centimetro quadrato di

$$\frac{12246}{750} = 16 \text{ kilog.}$$

Ora, dalle esperienze di Hodgkinson si ha, che in una trave, di sezione rettangolare i cui lati siano *a* e *b*, e di lunghezza *l* non oltrepassante le 45 volte la dimensione minore *b* della sezione trasversale, la resistenza assoluta allo schiacciamento, detto R un coefficiente relativo alla qualità del legname, ed espressi *a* e *b* in centimetri, *l* in decimetri, è data dall' espressione:

$$R \frac{a b^3}{l^2}.$$

Ponendo in essa il valore di R, che spetta all' abete, e che assunto il coefficiente di stabilità di $\frac{1}{10}$ è dato dall'esperienza eguale a 160 kilog. si ottiene che la resistenza assoluta di uno qualunque dei puntoni della Tettoja d' Arezzo sarebbe

$$160 \times \frac{30\,(25)^3}{(26,5)^2} = 106,895 \text{ kilog.}$$

e quindi la resistenza relativa, potrebbe salire, a

$$\frac{106,895}{750} = 142 \text{ kilog.}$$

Ma questa resistenza è per avventura soverchia, e per tener conto delle degradazioni, che può avere subìto il legname nei sei anni trascorsi, e per stare in più sicuri limiti, sarà bene ridurla alla metà di quella trovata colla formula di Hodgkinson, cioè a 70 chilogrammi per centimetro quadrato, ciò che dà per resistenza assoluta:

$$750 \times 70 = 52{,}500 \text{ kilog.}$$

Ma noi non abbiamo che a far fronte ad uno sforzo di 12,246; il coefficiente di stabilità è quindi, pei puntoni, dato dal rapporto:

$$\frac{12246}{10 \times 52500} = \frac{1}{43}.$$

Laonde la stabilità del sistema, è per questa parte, più che quadrupla del bisognevole.

Prendendo a considerare gli sforzi, che si esercitano sulle saette, noi vediamo che essi vanno dalla saetta verticale decrescendo, fin verso la metà del mezz' arco; poi ripigliano a crescere procedendo verso l' imposta. Nè vi ha questo solo da osservare, poichè i valori di tali sforzi, in questo decrescere e crescere, cambiano di segno, i tre primi essendo positivi, negativi gli altri.

Il segno negativo, che precede il valore di una forza, non altro significa, se non che quella forza ha direzione contraria a quelle, che nel calcolo si sono assunte come positive. Nel nostro caso, essendo positiva l' azione dei pesi, che operano sul sistema,

il segno negativo significa pertanto, che trattasi di forza operante in direzione opposta a quella della gravità.

Ma il passaggio dal positivo al negativo, che succede nei valori di K, non potendo avvenire se non che per lo zero, ne segue, che vi ha un punto nel sistema, posto tra i vertici (2) e (3), nel quale, se esistesse una saetta, là il corrispondente valore di K sarebbe nullo.

Positivi però o negativi, che siano, i valori di K, essi rappresentano sempre uno sforzo di compressione: poichè la saetta interposta, com' è, fra i due poligoni, superiore ed inferiore, sarà sempre cimentata allo schiacciamento, sia che la forza, a cui è soggetta, operi dall' alto al basso, cioè nella medesima direzione della gravità: sia che la forza operi in direzione opposta.

Non si avrà adunque, per il calcolo della stabilità, che da considerare lo sforzo massimo, il quale corrisponde al vertice (6).

Le saette essendo della medesima qualità di legname dei puntoni ed avendo la sezione:

$$25^{c.} \times 18^{c.} = 450^{c\,q.}$$

la resistenza relativa sarà per centimetro quadrato:

$$\frac{856}{450} = 1,90 \text{ kilog.}$$

la resistenza assoluta sarebbe:

$$450 \times 70 = 31{,}500 \text{ kilog.}$$

onde il coefficiente di stabilità:

$$\frac{856}{10 \times 31{,}500} = \frac{1}{368}$$

cioè così largo, che non monta occuparsene.

Veniamo per ultimo agli sforzi che si esercitano sulle catene. Questi sforzi seguono la legge di decremento ed incremento seguìta dai valori corrispondenti di K.

Essi seguono pure la stessa variazione di segno; ma, per questi, il segno non è più indifferente, come si è veduto essere per quelli.

Infatti se si considera che i valori di T rappresentano gli sforzi subìti dai lati di un poligono funicolare articolato; e che, in siffatti poligoni, quei lati sono tesi, pei quali la forza operante sul vertice corrispondente, si trova dalla parte convessa del poligono, e compressi invece quelli, pei quali la forza opera dalla parte concava, si deduce immediatamente, che essendo la parte convessa del nostro poligono vôlta verso l' alto, saranno tesi quei lati, pei quali le forze operanti saranno dirette di sotto in su, epperò affette dal segno negativo; saranno compressi invece quei lati, pei quali la forza operante si trova affetta dal segno positivo.

Nel caso particolare della Tettoia d' Arezzo, e nell' ipotesi assunta di distribuzione dei carichi, risultano positivi gli sforzi corrispondenti alle tre catene supreme.

Nella parte suprema adunque della Centina

d'Arezzo, lungi dal verificarsi la tensione massima dei tiranti: quella tensione, che provocò l'ordine di demolizione della Tettoia, si verifica invece una compressione.

La catena, in questa parte, cessa dunque di fare il suo uffizio; essa non è più un membro necessario del sistema, che concorra a rafforzarlo e a produrre, colla sua reazione, un effetto utile sull'insieme; essa è anzi un membro pregiudizievole, inquantochè mal prestandosi, e per forma e per qualità di materia, a reggere a tal maniera di sforzo, piuttostochè comprimersi, che è quanto dire, raccorciarsi, tenderà a inflettersi od a deviare dal piano verticale, in cui sono contenute le saette, alle quali è raccomandata, per crearsi coll'inflessione o con questa deviazione, secondochè le risulta più agevole, lo sviluppo, che le è necessario; e questo effetto infatti si è verificato nelle centine della Tettoia d'Arezzo, dove siffatta deviazione del monaco supremo, fu misurata essere da quattro in sei centimetri.

Meglio vale adunque sopprimer la catena in questa parte della Centina; perchè sopprimendola si toglie una causa di deformazione del sistema.

Il calcolo dice, che tale soppressione, non solo non porterebbe alterazione nelle condizioni d'equilibrio e di stabilità della Centina, ma le gioverebbe; l'esperienza ha confermato i risultamenti del calcolo, inquantochè, caricato il modello in iscala di un settimo, che si fece all'epoca della costruzione della Tettoia, con pesi di gran lunga superiori ai

pesi massimi, cui, ragguagliatamente, doveva resistere la Centina vera, si è riscontrato, che la soppressione di due tiranti non produceva alcuna sensibile perturbazione nell' equilibrio e nella resistenza del sistema.

Ma se le catene superiori, pel fatto della compressione, che avviene verso il colmo, cessano di fare il loro uffizio, e possono quindi togliersi; e giova anzi il toglierle; non così potrebbe farsi per quelle, che sono in effettiva tensione, e che per tal fatto dimostrano di produrre un effetto utile nel sistema.

Basta riflettere, che la parte principale della Centina, è a dire il poligono superiore, costituisce un arco a sesto assai elevato, ma di sezione così stretta, che quando fosse integralmente abbandonato a sè solo, senza sussidio di catene, la curva delle pressioni — (luogo geometrico dei punti d' applicazione delle risultanti degli sforzi, che i singoli elementi si trasmettono l' un l' altro) — non coincidendo colla curva direttrice dell' arco stesso, uscirebbe infallantemente dal campo della sezione, sebbene sia questa, quanto a resistenza, di gran lunga esuberante al bisogno, e, facendo forza obliquamente sull' arco, lo sfascerebbe. Il sistema delle saette e dei tiranti sopravviene allora in aiuto, e tendendo a ricondurre la curva nell' interno della sezione, rende possibile un equilibrio, che altrimenti non potrebbe sussistere.

Dirò più innanzi in qual modo si possa portar riparo all'anomalia della compressione nelle catene

superiori, che presenta la Centina d'Arezzo; or, proseguendo per la via tracciata, è mestieri riscontrare, se le catene che sono in tensione, stanno entro i limiti della stabilità.

Ripigliando perciò i valori negativi di T, noi vediamo che il massimo di Kilog. 5017 corrisponde al tirante estremo, cioè a quello pel quale fu affermato verificarsi la tensione minore, ma anche questa minor tensione si calcolava di Kilog. 11, 67 per millimetro quadrato.

Ora, malgrado che i sopraccarichi assunti nel nostro calcolo siano sensibilmente maggiori di quelli che portarono a siffatto risultato, noi troviamo che essendo la sezione delle catene:

$$\frac{1}{4}\,\pi\,(40^{\text{ mm.}})^2 = 1256^{\text{ mm. q.}}$$

la resistenza relativa risulta di

$$\frac{5017}{1256} = 3,\,99 \text{ kilog. per mm. q.}$$

vale a dire meno della metà di quello, che il Governo ha dichiarato di ammettere.

Assumendo ad ogni modo, per limite del lavoro del ferro, il peso di kilogrammi 7, 5 per millimetro quadrato, cioè il quinto circa dello sforzo di rottura, che, per costruzioni del genere di una tettoia, non soggette a violente vibrazioni, è un limite assai largo: la resistenza assoluta dei tiranti della Tettoia d'Arezzo sarebbe:

$$1256 \times 7,\,5 = 9420 \text{ kilog.}$$

onde il coefficiente di stabilità effettiva:

$$\frac{5017}{5 \times 9420} = \frac{1}{9}.$$

Da tutta questa analisi risulta in modo evidente dimostrato, che nella Tettoia d'Arezzo, per quanto riflette la resistenza dei materiali, che la costituiscono, non vi ha difetto, ma eccesso di stabilità.

Vi ha eccesso nelle dimensioni dei puntoni, che hanno sezione costante da un capo all'altro della Centina; mentre, decrescendo gli sforzi di compressione, dall'imposta alla chiave, potrebbe la sezione decrescere nella stessa ragione, cominciando ad avere, nella parte più affaticata, una sezione minore di quella, che è stata loro effettivamente assegnata.

Vi ha eccesso nelle dimensioni delle saette, che hanno sezione costante, e di gran lunga superiore a quella, che le leggi della stabilità esigono.

Vi ha eccesso nelle catene, perchè alcune si potrebbero, non solo impunemente, ma con vantaggio sopprimere, e quelle che fanno un qualche effetto, hanno sezione doppia di quanto si vorrebbe, per stare nel limite di quella stabilità, che si ricerca in simili opere.

XVI.

Determinazione degli sforzi, che si verificherebbero nelle varie parti della Centina d'Arezzo, supposta più perfettamente articolata nei giunti.

Nel determinare i coefficienti di stabilità della Centina, che è oggetto precipuo di questo Studio,

noi abbiamo applicato le formule, che abbiamo dedotte nel caso di un' articolazione imperfetta dei giunti, per le ragioni, che abbiamo esposte sul finire del Capitolo IX.

Ma può interessare conoscere i valori, che assumerebbero gli sforzi sui puntoni, sulle saette e sulle catene, quando una più perfetta articolazione di queste parti permettesse una non interrotta trasmissione di sforzi, dall' una all' altra, ritenendo che nessuno si consumi, in questo tragitto, in alcuna deformazione o resistenza passiva: vale a dire ritenendo le parti rigide, e niun attrito possibile nelle articolazioni.

Ebbene, applicando le formule, che abbiamo stabilite al Capitolo X, e arrestandoci ai valori di S', K e T', noi troviamo per la Centina d' Arezzo così supposta, stando ferme tutte le altre ipotesi assunte nel primo calcolo, i valori consegnati nella seguente tabella:

Sforzi sui puntoni.	Sforzi sulle saette.	Sforzi sulle catene.
Kilog.	Kilog.	Kilog.
$H + H' = 8604$		
$S_0 + S'_0 = 8598$	$K'_0 = + 313$	$T'_0 = + 2098$
$S_1 + S'_1 = 8775$	$K'_1 = - 485$	$T'_1 = - 3254$
$S_2 + S'_2 = 9144$	$K'_2 = - 572$	$T'_2 = - 3780$
$S_3 + S'_3 = 9690$	$K'_3 = - 729$	$T'_3 = - 4706$
$S_4 + S'_4 = 10499$	$K'_4 = - 950$	$T'_4 = - 5995$
$S_5 + S'_5 = 11322$	$K'_5 = - 1241$	$T'_5 = - 7559$
$S_6 + S'_6 = 12244$	$K'_6 = - 1567$	$T'_6 = - 9184$

Dalla quale rilevasi, che la supposizione di una così perfetta trasmissione di sforzi, da una parte all'altra della Centina, restringe la compressione al solo tirante supremo, perchè esso è il solo che risulti avere uno sforzo affetto da segno positivo; e che il tirante più teso viene a subire uno sforzo, per millimetro quadrato di sezione, di

$$\frac{9184}{1256} = 7,32 \text{ kilog.}$$

Quindi, anche quando si voglia supporre, ciò che non si può assolutamente ammettere, che la Centina d'Arezzo costituisca un sistema così perfettamente articolato e composto di parti rigide, lo sforzo delle catene (per non parlare degli sforzi sofferti dai puntoni e dalle saette, che hanno un coefficiente di stabilità larghissimo), si troverebbe sempre nel limite della più larga stabilità.

XVII.

Grado di rigidità della Centina d'Arezzo.

Ma se per rispetto alla resistenza dei materiali, la stabilità della Tettoia d'Arezzo, risulta più che perfetta: men perfetta è la disposizione delle sue parti, e il fatto stesso delle catene compresse costituisce un vizio organico grave del sistema; al quale, ove si aggiunga quello, non men grave, dello scostarsi, che esso fa, dalla base dei sistemi indeformabili, che è il triangolo, apparirà manifesta la mancanza di quella rigidità, che è studiosamente

da procacciarsi nei sistemi complessi più o meno perfettamente articolati.

Nella Tettoia d' Arezzo, alla deformabilità degli elementi quadrangolari, che la costituiscono, è fatto contrasto mediante quel sistema di crociere di ferro, di cui abbiamo già tenuto parola, che raccomandano, sulle due faccie opposte della Centina, le saette ai puntoni e i puntoni assicurano gli uni agli altri.

Noi abbiamo, nel processo del calcolo, imparato ad apprezzare algebricamente le forze, che tendono a far rotare i puntoni intorno ai vertici del poligono e le saette intorno al loro punto d' incontro coi puntoni, non che il loro momento.

Vediamo adunque quale sia l' entità di questi momenti per giudicare del grado di rigidità della Centina d'Arezzo.

I momenti di rotazione dei puntoni, l' un sull' altro, come abbiamo già detto, non siamo in grado di apprezzare al giusto, ma solo possiamo argomentare non siano di grande entità. D' altra parte la rigidità del sistema è essenzialmente raccomandata alla immobilità delle saette; gli è adunque il momento di rotazione di queste ultime, intorno al loro incastro, che importa essenzialmente calcolare.

Per ciò fare, prima d' ogni altra cosa, è mestieri determinare la lunghezza delle saette, poichè esse misurano il braccio di leva con cui operano le forze, che tendono a farle rotare.

Si consideri perciò (Tav. III^a, fig. 3^a) una saetta qualunque $\overline{ac}$, cui corrispondono gli angoli φ e ψ; si conducano le due orizzontali $\overline{ad}$, $\overline{ce}$, e la verticale $\overline{cb}$. Dal triangolo $\overline{abc}$ si ricaverà:

$$\overline{ac} = \frac{\overline{ab}}{\text{sen } \varphi};$$

ma si ha:

$$\overline{ab} = r \text{ sen } \varphi - r' \text{ sen } \psi;$$

dunque,

$$\overline{ac} = r - r' \frac{\text{sen } \psi}{\text{sen } \varphi}.$$

Ponendo pertanto in questa relazione i valori di φ e di ψ, che competono a ciascuna saetta, insieme coi valori di r e di r', che competono alla Centina d'Arezzo, se ne desumeranno le lunghezze seguenti:

saetta (1) = 1,^{m}82,
» (2) = 1,^{m}77,
» (3) = 1,^{m}53,
» (4) = 1,^{m}25,
» (5) = 0,^{m}91,
» (6) = 0,^{m}48,

Per la saetta corrispondente al vertice (0), la formula conduce al simbolo dell' indeterminato $\frac{0}{0}$; e difatto in essa nulla vi ha che determini la posizione rispettiva dei centri dei due archi, ma questa è nota *a priori*, ed è nota *a priori* la lunghezza della saetta che è di 1^m,90. Nel nostro calcolo però non importa tener conto di questa saetta,

perchè, a cagione della simmetria del sistema, tutte le forze, che operano su di essa, si fanno scambievole equilibrio.

Passiamo a determinare il valore delle forze $T_{,}$. Per poco che si rifletta, è facile vedere che l' espressione generale di queste forze è la seguente:

$$T_{,n} = F_n \frac{\cos \frac{1}{2} (\psi_n - \psi_{(n-1)})}{\operatorname{sen} \frac{1}{2} (\psi_n - \psi_{(n-2)})}.$$

Ponendo in questa espressione, per $T_{,}$, F, ψ, n, le quantità che competono a ciascuna saetta, se ne desumeranno i valori seguenti:

$T_{,1} = 1127$ Kilog.
$T_{,2} = 608$ »
$T_{,3} = 355$ »
$T_{,4} = 1672$ »
$T_{,5} = 3325$ »
$T_{,6} = 5016$ »

Riguardando questi valori e confrontandoli coi valori ottenuti di T, noi vediamo, la irregolarità del poligono interiore essere tanto piccola, da non cominciare a far sentire la sua influenza, che nei vertici (5) e (6), con una differenza, fra le due componenti delle forze F_5 ed F_6, che è appena di una unità.

Pigliando ora l' espressione generale delle forze $U_{,}$, che è:

$$U_{,n} = (T_{,n} - T_{(n-1)}) \cos \left(n\, \varphi - \tfrac{1}{2} (\psi_{(n-1)} + \psi_{(n-2)}) \right),$$

ed osservando che si ha:

$$
\begin{aligned}
T_{,1} - T_0 &= 5418 \text{ Kilog.} \\
T_{,2} - T_1 &= 1735 \quad » \\
T_{,3} - T_2 &= 963 \quad » \\
T_{,4} - T_3 &= 1317 \quad » \\
T_{,5} - T_4 &= 1653 \quad » \\
T_{,6} - T_5 &= 2690 \quad »
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\varphi - \tfrac{1}{2}(\psi_0) &= 6.^\circ 16.' \, 33'' \\
2\varphi - \tfrac{1}{2}(\psi_1 + \psi_0) &= 8.^\circ 16.' \, 30'' \\
3\varphi - \tfrac{1}{2}(\psi_2 + \psi_1) &= 10.^\circ 09.' \, 24'' \\
4\varphi - \tfrac{1}{2}(\psi_3 + \psi_2) &= 11.^\circ 51.' \, 28'' \\
5\varphi - \tfrac{1}{2}(\psi_4 + \psi_3) &= 13.^\circ 23.' \, 05'' \\
6\varphi - \tfrac{1}{2}(\psi_5 + \psi_4) &= 14.^\circ 36.' \, 47'';
\end{aligned}
$$

si ricaveranno i seguenti valori:

$$
\begin{aligned}
U_{,1} &= 5386 \text{ Kilog.} \\
U_{,2} &= 1716 \quad » \\
U_{,3} &= 948 \quad » \\
U_{,4} &= 1289 \quad » \\
U_{,5} &= 1607 \quad » \\
U_{,6} &= 2603 \quad »
\end{aligned}
$$

Ci restano ora a determinare le forze U, per le quali l' espressione generale abbiamo trovato essere:

$$U_n = K_n \operatorname{sen} (n\,\varphi - \psi_{(n-1)}).$$

Ponendo in questa espressione i valori di U, K, φ, ψ ed n competenti a ciascuna saetta, otterremo i valori seguenti:

$$
\begin{aligned}
U_1 &= 5,90 \text{ Kilog.} \\
U_2 &= 6,41 \quad » \\
U_3 &= 5,52 \quad » \\
U_4 &= 34,13 \quad » \\
U_5 &= 83,80 \quad » \\
U_6 &= 146,70 \quad »
\end{aligned}
$$

Ora possediamo tutti gli elementi, che ci occorrevano per il calcolo dei momenti cercati, poichè dell' equazione generale, che li rappresenta,

$$\frac{R_n\, I}{v} = l_n \left(U_n + U_{,n}\right)$$

noi conosciamo i valori di tutte le quantità, che ne compongono il secondo membro, e ponendo per I e per v le quantità, che si riferiscono alla sezione costante delle crociere, potremo desumerne il valore:

$$R_n = \frac{l_n\, v}{I} \left(U_n + U_{,n}\right),$$

cioè lo sforzo che per unità di superficie debbono sopportare i bracci delle crociere, quando si fa astrazione dalle resistenze, che oppongono alla rotazione l' incastro proprio della saetta, e le fibre del legno che direttamente s' appoggiano sui puntoni.

Ora, prendendo per unità il millimetro, la sezione resistente dei bracci delle due crociere giustapposte è rappresentata da un rettangolo, che ha il lato nella direzione del movimento, di 100 millimetri, e quello normale al movimento, di 22 millimetri, si avrà adunque:

$$v = 50^{mm}$$

$$I = \frac{1}{12}\, 22\, (100)^3.$$

Ponendo questi valori, ed osservando che si ha:

$$\begin{aligned}
U_1 + U_{,1} &= 3380 \text{ Kilog.} \\
U_2 + U_{,2} &= 1710 \quad » \\
U_3 + U_{,3} &= \ \ 954 \quad » \\
U_4 + U_{,4} &= 1323 \quad » \\
U_5 + U_{,5} &= 1691 \quad » \\
U_6 + U_{,6} &= 2750 \quad »
\end{aligned}$$

si ottengono per gli sforzi, a cui, nelle assunte ipotesi, sarebbe cimentato il ferro, per ogni millimetro quadrato di sezione resistente, i valori:

$R_1 = 267$ kilog.
$R_2 = 83$ »
$R_3 = 40$ »
$R_4 = 45$ »
$R_5 = 42$ »
$R_6 = 36$ »

Sforzi così straordinari, combinati coi relativamente piccoli movimenti di rotazione subìti dalle saette, dimostrano, che assai poco valgono le crociere di ferro ad assicurare l' indeformabilità del sistema; la quale conseguentemente è, più che ad altro, raccomandata alla solidità dell' incastro, ed alla resistenza alla compressione di punta, delle fibre del legno, contra gli appoggi.

XVIII.

Come la indeformabilità dei sistemi articolati sia da raccomandarsi alla forma triangolare.

Il poco effetto, che si ottiene dalle crociere di ferro della Centina d'Arezzo, risponde perfettamente al principio generale ricordato sul cominciare del precedente Capitolo, doversi l' indeformabilità di un sistema articolato complesso, raccomandare essenzialmente alla forma triangolare.

Infatti ognun vede, che se negli spazi quadrangolari interclusi fra i puntoni, le catene e le saette, fossero stati posti dei pezzi sussidiari, nella dire-

zione delle diagonali: questi operando sul punto stesso d' applicazione della forza, cui è da farsi contrasto, avrebbero, con relativamente piccola fatica, reso indeformabile il sistema. Mentre, a ottenere equivalente risultato col mezzo delle crociere anzidette, si vorrebbero ben più robuste dimensioni, e cantonali e ghiere di rinforzo; e tutto ciò operando, ad ogni modo, con braccio di leva assai piccolo, ne verrebbe sciupo di materia per rispetto all' effetto ottenuto.

Risulta eziandio, in modo evidente, come a raggiungere la perfetta indeformabilità del sistema, basterebbe una sola diagonale, per ciascun elemento quadrangolare, e questa nella direzione $\overline{(1)(0_{,})}$, $\overline{(2)(1_{,})}$, $\overline{(3)(2_{,})}$ . . . . . . se la diagonale si faccia di materia più atta a resistere alla compressione: nella direzione opposta, cioè $\overline{(0)(1_{,})}$, $\overline{(1)(2_{,})}$ $\overline{(2)(3_{,})}$ . . . . . . se si tratti d' impiegare tiranti di ferro meglio atti a resistere alla estensione.

Che se il sistema si volesse più stabilmente assicurare, non si avrebbero che da impiegare contemporaneamente i due sistemi di diagonali, e si verrebbero così a formare le famose croci di Sant' Andrea, che sono ormai la base del congegno di tutti i sistemi di travi composte; allora la forza, che tende a far rotare le saette intorno al loro incastro, verrebbe neutralizzata dalle due diagonali concorrenti all'estremo della saetta, che si considera: e la loro sezione rispettiva potrebbe essere determinata col criterio di far sopportare, a ciascuna, la metà della forza operante.

XIX.

Movimenti e deformazioni avvenute nelle Centine d'Arezzo.

Ma ritornando alla Tettoia d' Arezzo, e considerando le relativamente lievi deviazioni subìte dalle saette, si può argomentare che ciò sia da attribuire, più che ad altro, alle eccedenti loro dimensioni trasversali.

D' altra parte non è da dar gran valore alla forma più o men perfettamente regolare, che presentano ora quelle centine, inquantochè sembra, che a questa perfetta regolarità non siasi troppo badato nell' atto della costruzione. Basti il dire che fatta accuratamente rilevare una centina (che è però da pensare sia la più deformata), si sono riscontrate differenze fin di 25 centimetri di lunghezza da puntone a puntone.

Ad ogni modo, a dare un' idea delle deformazioni, che si riscontrano nel poligono superiore della centina rilevata si nota, che giustapponendo le due metà della medesima l' una sull' altra, si trovano i seguenti spostamenti orizzontali:

per il	vertice	(1)	lo spostamento di	$0.^{m}10$,
»	»	(2)	»	$0.^{m}30$,
»	»	(3)	»	$0.^{m}25$,
»	»	(4)	»	$0.^{m}10$,
»	»	(5)	»	$0.^{m}07$,
»	»	(6)	»	$0.^{m}10$.

Nel senso verticale, non vi ha che il vertice (4), pel quale si ritrovi una differenza di livello fra le due parti di $0^{m},10$.

I sovradetti spostamenti orizzontali attribuendo metà per parte, ne verrebbe per il vertice (2) uno spostamento massimo di $0^m,15$ il quale spostamento avrebbe qualche importanza se la centina fosse stata eseguita con tutta perfezione; ma la perde affatto, quando si sappia che appunto il puntone corrispondente è uno di quelli, pei quali si verifica la sovradetta differenza di lunghezza.

Possiamo adunque affermare, che nella Centina d'Arezzo, fatta astrazione dai difetti di costruzione, il difetto essenziale stà nella compressione che succede nei tiranti superiori, il quale, aiutando gli agenti esteriori, è senza dubbio la cagione precipua dei movimenti, che vi si sono verificati, e di quello segnatamente, che più ha destato apprensione, cioè il movimento del piedritto, che risponde alla parte della campagna.

E infatti avendo predominio i venti, che spirano nella direzione dalla Città alla campagna, essi hanno potuto, trovando la Centina in tali condizioni, riportare il loro effetto sul piedritto che stà dalla parte opposta, il quale perciò si dovette consolidare con robusti speroni di rinfianco.

XX.

Ricerca del modo di togliere il difetto di tensione che si verifica in parte delle catene.

Fa adunque mestieri, più che ad ogni altra cosa, rivolgere lo studio a mettere tutte le catene in tensione.

Risalendo perciò alle cause, che influiscono sulla tensione o compressione delle catene, noi abbiamo già veduto che la condizione perchè un tal fatto si verifichi, è che tutti i valori degli sforzi K siano preceduti dal segno negativo. Or, perchè questo avvenga, è mestieri che il termine negativo, che è compreso nella espressione algebrica del loro valore, sia mai sempre superiore al termine positivo; ciò è quanto dire, che la componente normale della forza, che da un puntone si trasmette al puntone successivo, superi, in valore assoluto, la componente normale del peso applicato al vertice, che si considera.

Nelle ipotesi, che abbiamo prese a base del nostro calcolo, risultano positivi i valori di K corrispondenti ai tre vertici supremi; ciò significa, che in quei vertici, la componente del peso la vince sulla componente dell' azione reciproca dei puntoni, a cominciare dalla spinta orizzontale alla chiave.

Per fare adunque che la cosa s' invertisse, sarebbe mestieri alleggerire il peso, che gravita su quei tre vertici, o crescere convenientemente il valore della spinta orizzontale alla chiave, che è quanto dire, aumentare convenientemente il peso permanente, che gravita sui vertici inferiori, poichè di tutte le quantità, che entrano nel valore di H, niun' altra si potrebbe far variare all' infuori della p, la Centina non potendo mutarsi di forma o di dimensioni, e la quantità q essendo costante, perchè assunta come tale, a base del calcolo.

Variare la p equivale a mutare il peso proprio della Centina; alleggerire i vertici supremi non è guari possibile in via assoluta; lo risulta, fino ad un certo segno, in via relativa, quando si crescano i pesi operanti sugli altri vertici, e ciò si concepisce fattibile, mediante l' impiego di adatti contrappesi.

Può quindi dirsi, che il problema, di mettere in tensione tutte le catene, coincide con quello, di trovare una conveniente ripartizione di carichi addizionali, da distribuirsi opportunamente sulla Centina.

Una tale soluzione, che si presenta a prima giunta così ovvia e ad un tempo così semplice risulta però, nel fatto, assai poco pratica; inquantochè, se si cercassero i valori di questi pesi addizionali, eglino si troverebbero tali, che difficilmente si saprebbe in qual modo applicarli; nè sarebbe meno assurdo, che per mettere in discrete condizioni di rigidità un sistema, che già eccede in tutte le sue parti, si prendesse il partito di aggiungervi altro materiale, per non altro uffizio che quello di operare per il proprio peso morto, niuna cimentando delle qualità reattive della materia.

Questo partito è adunque da bandirsi.

XXI.

Aggiunta di un nuovo sistema di tiranti sussidiari.

Andando alla ricerca di un rimedio che sia più pratico e razionale, non potremo dipartirci dal criterio, che abbiamo precedentemente stabilito, e con-

siste nel trovar modo di alleggerire la cervice della Centina e di aggravare le reni. Or l' idea, che sopravviene immediatamente, è quella di procacciare, per mezzo di tiranti opportunamente disposti ed operanti nella parte inferiore della Centina, un effetto analogo a quello, che si aveva di mira col sovraccaricare i vertici corrispondenti.

Questa idea ci si offre con quell' apparenza di pratica attuabilità, che non si è riscontrata nella prima. Sarebbero sempre, è vero, da aggiungere nuovi materiali a quelli già esuberanti della Centina; ma questi materiali riuscirebbero almeno impiegati in un modo più apparentemente utile, in quanto che, oltre all' operare per il proprio peso, concorrerebbero a concatenar meglio il sistema della Centina, reagendo colla loro resistenza all' estensione.

Una conveniente disposizione di tiranti parrebbe quella segnata nella figura 5ª della Tav.ª I. Sarebbero due tiranti cioè, che partirebbero dalle due parti della Centina, l' uno dall' imposta, l' altro da quello dei vertici, pel quale si è verificato il duplice spostamento orizzontale e verticale; questo nella dirittura del raggio corrispondente: quello rialzantesi alquanto sull' orizzontale dell' imposta, per venire a congiungersi col primo in un punto, dal quale si partirebbe un quinto tirante, che terrebbe in tensione il sistema degli altri quattro.

Ma se si costruisce la curva d' equilibrio corrispondente alla spinta orizzontale di 5045 kilog., che abbiamo riscontrato verificarsi nella nostra

ipotesi: e la si confronta colla curva circolare direttrice della Centina, si trova, che per avere il lato supremo del poligono d' equilibrio nella direzione della direttrice stessa, bisognerebbe ottenere alla chiave una spinta orizzontale quintupla all'incirca di quella che si ha di fatto, è a dire di circa 25,000 kilog.

Ora, per produrre una tale spinta, con un sistema di tiranti, quale si è proposto, (e che anche parve, a tutta prima, alla Commissione eletta dalla Società delle Ferrovie Romane, potere assai bene soddisfare al consolidamento della Tettoia di Arezzo) si trova, instituendo gli opportuni calcoli, essere necessario esercitare, sul tirante posto nella direzione del raggio (4), che è quello nel quale si è riscontrato il duplice spostamento sopradetto, una tensione di oltre 40,000 chilogrammi.

Questo risultato è assai poco soddisfacente, in quantochè, mentre i tiranti del sistema, anche nell' ipotesi di massimo sovraccarico non soffrono uno sforzo superiore a 5017 kilog., par poco logico che, per mettere in tensione alcuni di essi, che non lo sono, s' introduca nel sistema un tirante soggetto ad uno sforzo otto volte maggiore, che, quand' anche fosse ridotto alla metà, con un effetto assai men favorevole sulla spinta orizzontale, sarebbe sempre eccessivo.

Ma meno soddisfacente ancora lo rende la seguente considerazione.

Lo stabilire una tensione nella direzione del raggio, equivale evidentemente a rendere, nel corri-

spondente valore di K, prevalente il termine positivo. Quivi adunque necessariamente si viene a creare quello, che si cerca di evitare nella parte superiore della Centina.

Tanto vale lasciar le cose nello stato in cui si trovano, che appigliarsi ad un partito così improprio ed irrazionale, che non avrebbe altro effetto, che di spostare il difetto ravvisato in una parte della Centina, per portarlo in un' altra, con ispesa non ispregevole e con un notevole aumento nella fatica di tutte le parti della medesima.

Pertanto anche questo partito è da bandirsi.

XXII.

Tensione artificiale dei tiranti esistenti.

Ripensando ai risultati ottenuti e non disperando, malgrado gl' infruttuosi tentativi fatti, di trovare una soluzione più semplice e razionale, io mi sono proposto di ottenere il desiderato effetto, senza crescere sensibilmente la già eccedente quantità di materia riscontrata nella Centina, ed anzi traendo da questa eccedenza tutto il miglior profitto possibile.

Or questo effetto di tensione di tutti i tiranti, che non si è potuto conseguire per vie indirette, non potrebbe egli ottenersi direttamente? — La risposta ad una tale domanda mi ha schiusa la via alla soluzione del problema.

Non vi ha infatti niente di piu facile, che met-

tere in tensione un tirante. Ebbene, si provochi artificialmente, in uno dei tiranti, questa tensione; epperò lo si tronchi in due parti, e le due parti si commettano insieme con un manicotto, dove stia una doppia madrevite, che imbocchi nelle due estremità pensili delle parti stesse, lavorate a vite andanti in direzioni opposte.

Egli è evidente, che con siffatto semplicissimo apparecchio, non solamente noi verremo a reagire contro lo sforzo di compressione, che si esercita sui tiranti supremi; ma, col girar della vite, potremo dare a quel tirante, cui si applica l'apparecchio, tutta quella tensione maggiore, che vorremo, non da altro trattenuti, che dalla resistenza assoluta dei tiranti, la quale, ove si voglia stare in un limite sufficiente di stabilità, vale a dire non cimentando il ferro, nei casi più sfavorevoli, a più di 8 o 9 kilogrammi per millimetro quadrato, potrebbe salire a kilogrammi 11,800, ritenuto che il diametro reale dei tiranti è di 41 millimetri.

Or è da vedere quale sia il tirante, al quale è da applicarsi l'apparecchio, e quale la tensione da provocarvisi.

Per poco che si rifletta alla cosa, è facile persuadersi, che il limite di queste ricerche è dato dalla condizione, che nessuno dei tiranti rimanga compresso. — Ora, nel caso nostro, il tirante più compresso risultando il tirante supremo, sarà da stabilirsi la condizione, che il valore dello sforzo, che esso subisce, si riduca a zero.

Dovrà dunque porsi

$$T_0 = 0$$

donde viene:

$$K_0 = 0$$

ma

$$K_0 = (p + q) - H \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}$$

dunque

$$(p + q) - H \operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} = 0$$

e di quì

$$H = \frac{p + q}{\operatorname{sen} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}.$$

Ponendo in questa equazione i valori delle quantità p, q, φ, che competono al caso nostro, ne dedurremo:

$$H = 12{,}026.$$

Condizione adunque indeclinabile, perchè nessuno dei tiranti risulti compresso, nelle ipotesi di carichi da noi assunte, è che la spinta orizzontale, alla chiave, sia portata ad essere almeno di 12,026 kilog.

Non preoccupandoci per ora del modo, con cui potremo giungere a questo effetto, vediamo quali mutamenti verrebbero negli sforzi delle varie parti della Centina, quando si potesse ottenere una tale spinta.

Per ciò non avremo che ripigliare i nostri valori algebrici, e partendo dalla spinta anzidetta, ricalcolare tutti i valori dei gruppi S, K e T.

Il risultato di questo calcolo è consegnato nella seguente tabella:

Sforzi sui puntoni.	Sforzi sulle saette.	Sforzi sulle catene.
Kilog.	Kilog.	Kilog.
$H = 12026$		
$S_0 = 11975$	$K_0 = o$	$T_0 = o$
$S_1 = 11973$	$K_1 = -1100$	$T_1 = -7381$
$S_2 = 12164$	$K_2 = -1155$	$T_2 = -7632$
$S_3 = 12532$	$K_3 = -1279$	$T_3 = -8257$
$S_4 = 13136$	$K_4 = -1463$	$T_4 = -9232$
$S_5 = 13785$	$K_5 = -1726$	$T_5 = -10512$
$S_6 = 14530$	$K_6 = -2016$	$T_6 = -11815$

Esaminando questa tabella noi troviamo, come non potrebbe essere altrimenti, esattamente adempiuta la condizione, che niun tirante rimanga compresso; vediamo eziandio, che il tirante più teso stà nel limite di tensione, che può essere stabilmente tollerato dalla materia.

È quindi ovvio il modo di riuscire alla risoluzione del problema proposto. Basterà evidentemente provocare nel tirante T_{11} coll' artifizio suggerito, una tensione superiore a 7381 kilog., per esser certi, che nelle ipotesi assunte, tutti i tiranti rimangano tesi.

Che se, crescendo il valore di T_1 oltre il limite di 7381 kilog., accade, che nel tirante più teso, la tensione oltrepassi il limite di stabilità assegnato: è da avvertire, che nelle nostre formule, noi abbiamo supposto, gravato il vertice supremo della Centina di un peso superiore al vero, e che quindi,

stando anche contenti al limite di 7381 kilog., potremo, senza oltrepassare il valore trovato per T_6, ottenere per T_0 un valore negativo.

Possiamo adunque affermare, che col mezzo della tensione artificiale del tirante, che vien secondo partendo dal vertice supremo della Centina, si ottiene che tutti quanti i tiranti siano tesi, perchè gli sforzi rispettivamente subìti risultano tutti negativi.

Che se considerando l'eccesso di stabilità, che ancora risulta, malgrado la cresciuta spinta orizzontale, nel sistema dei puntoni e dei monaci, noi volessimo giovarcene per mettere in sempre migliori condizioni di rigidità la nostra Centina, è da osservare: che, a vantaggiare questa rigidità, giova metter tutte le catene in maggior tensione, e prova ne sia quel che avviene in un arco da lanciar saette, che tanto più è rigido, quanto più è inarcato e tesa la corda.

Potrebbe quindi essere opportuno crescere la tensione del tirante T_1 al di là del limite, che abbiamo assegnato di sopra, per conseguire, in un più forzato contrasto di parti, il rafforzamento della Centina. Ma siccome il crescere la tensione T_1, porterebbe ad oltrepassare, nei tiranti inferiori, il limite di stabilità prescritto, così sarebbe mestieri, quando ciò si facesse, rafforzare questi tiranti, quanto occorre, perchè il limite predetto non venisse mai sorpassato.

Se non che rammentando, quanta fatica sopporterebbero le crociere di ferro, alle quali è spe-

cialmente raccomandata la rigidità della Centina, ove da sole dovessero reggere agli sforzi, che tendono a produrre la rotazione delle saette, nella ipotesi di carichi assunta a base dei nostri calcoli: apparisce la necessità di vedere, quale effetto in esse produca la tensione artificiale dei tiranti.

Valendoci per ciò della conseguenza dedotta nel calcolo fatto al Capitolo XVII, che i valori delle forze $T_{,}$, a cagione della piccolissima irregolarità del poligono interiore, possono ritenersi eguali ai valori delle forze T: dedurremo dalla tabella, che precede, relativa agli sforzi subìti dalle varie parti della Centina dopo l'introduzione dell' apparecchio di tensione, le seguenti differenze:

$T_{,1} - T_0 = 7381$ Kilog.
$T_{,2} - T_1 = 251$ »
$T_{,3} - T_2 = 652$ »
$T_{,4} - T_3 = 975$ »
$T_{,5} - T_4 = 1280$ »
$T_{,6} - T_5 = 1303$ »

Le quali differenze, se si eccettua quella $(T_{,1}—T_0)$, poste a confronto colle differenze analoghe ottenute al Capitolo XVII per il caso della Centina nello stato presente, risultano considerevolmente diminuite.

Ma anche la differenza $(T_{,1}—T_0)$ non ha l' importanza che apparisce dal precedente specchietto. Basta infatti avvertire che il valore $T_0 = o$, che è quello che porta a tanta differenza, dipende dall' essere riferito al vertice (0), pel quale si ha $K_0 = o$; ma in realtà il tirante compreso fra i vertici (0)

ed (1), non rimane ozioso, e se non risente tensione dall' estremo (0), la risente però dall' estremo (1) per effetto della seconda componente della forza F_1, che è nella stessa sua direzione, ed ha, per la ragione detta di sopra, un valore che può ritenersi eguale a T_1, onde risulta:

$$T_{,1} - T_0 = 0.$$

Facendo il calcolo degli sforzi, che risentirebbero, in questo nuovo stato della Centina, i bracci delle crociere di ferro, quando da sole operassero, per farne il confronto con quelli desunti nella prima ipotesi, si ottengono i risultati, che si raccolgono nel seguente specchio:

Valori di U	Valori di $U_,$	Valori di $(U + U_,)$	Valori di R
Kilog.	Kilog.	Kilog.	Kilog.
$U_1 = 39$	$U_{,1} = 0$	$U_1 + U_{,1} = 39$	$R_1 = 2$
$U_2 = 81$	$U_{,2} = 247$	$U_2 + U_{,2} = 328$	$R_2 = 16$
$U_3 = 128$	$U_{,3} = 615$	$U_3 + U_{,3} = 743$	$R_3 = 33$
$U_4 = 188$	$U_{,4} = 954$	$U_4 + U_{,4} = 1142$	$R_4 = 39$
$U_5 = 309$	$U_{,5} = 1245$	$U_5 + U_{,5} = 1554$	$R_5 = 39$
$U_6 = 345$	$U_{,6} = 1261$	$U_6 + U_{,6} = 1606$	$R_6 = 21$

Confrontati i valori di R con quelli ottenuti nel Capitolo XVII, è ragguardevole la differenza che corre nei due casi.

È fatto adunque palese, che dall' introduzione dell' artifizio di tensione, gli sforzi, che cospirano a far rotare le saette intorno ai loro incastri, risultano grandemente diminuiti; onde le condizioni di

rigidità della Centina, restano dal fatto della tensione artifiziale delle catene, grandemente vantaggiate.

Non vuolsi, per ultimo, trasandare un altro non meno rilevante vantaggio, che dal proposto artifizio consegue: ed è, che siccome il mettere in tensione i tiranti supremi, vale quanto alleggerire la Centina alla cervice, e crescere il valore della spinta orizzontale, che dalla chiave, dove è meglio che duplicata, si propaga cresciuta, per rispetto a quella che si ritrova nel primo stato della Centina, sino all' imposta, ove raggiunge il valore:

$$Q = 5322 \text{ kilog.};$$

così avendo noi, fin dal principio, fatto osservare come sulla parte mezzana della Tettoja di preferenza si esercitino gli sforzi accidentali dovuti al carico delle nevi, e, sulle falde laterali, gli sforzi accidentali dovuti all' azione dei venti, si fa manifesto, che, colla tensione artificiale del secondo tirante, noi veniamo ad alleviare nella Centina la fatica dipendente dal carico delle nevi, ed a rafforzarne i fianchi, rendendoli meglio disposti a reggere all' impeto dei venti colla sua cresciuta resistenza orizzontale.

XXIII.

Consolidamento della Tettoia d' Arezzo.

Io mi vedo quindi portato, dai ragionamenti che sono andato via via esponendo, e dalle conseguenze che ne ho, mano a mano, dedotto, a conchiudere:

che la Tettoia d'Arezzo, nello stato in cui di presente si trova, se ha difetto di rigidità, non ha però difetto di solidità; e che alla difettante rigidità si può assai bene sovvenire, coll' applicazione di un apparecchio di tensione nei tiranti supremi delle centine.

In grazia di tale semplicissimo apparecchio, quella Tettoia abbiamo veduto ridursi ad assai buone condizioni di stabilità.

Che se poi a tale artificio si accoppii un sistema di collegamento trasversale delle centine, le une alle altre, migliore di quello che vi si vede praticato, consistente in due semplici lame, correnti a diagonale, sulla superficie esteriore del tetto, da un estremo all' altro dell' edifizio: si raggiungerà tutta quella maggiore stabilità, che possa desiderarsi in un'opera di questa fatta, portante, dalla sua origine, un vizio organico, che si può relativamente correggere, ma non assolutamente distruggere.

XXIV.

Condizione, perchè nei tiranti di una Centina, come quella d' Arezzo, non si verifichi compressione.

Poichè la reazione verticale dell' appoggio è costante, qualunque sia la forma della Centina ed il suo sesto, quando si suppongano costanti i pesi p, q e il numero dei punti d' applicazione dei medesimi, è naturale domandarsi, quale influenza abbia, sugli sforzi delle singole parti della Centina, il variare della sua monta.

Supponendo che la monta diminuisca, è facile vedere che gli sforzi cresceranno; poichè. diminuendo la monta, diminuerà il valore dell' angolo Φ, crescerà conseguentemente il valore:

$$S_{(m-1)} = \frac{m\,(p+q)}{\operatorname{sen}\left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

e il crescere di $S_{(m-1)}$ è indizio, che cresceranno tutti i valori di S, poichè gli uni sono dipendenza degli altri.

Ma col crescere dei valori di S, cresce la parte negativa dei valori di K: onde è, che mentre per quelle catene, che già si trovano tese, si aumenta la tensione; per quelle, nelle quali, come nel caso d'Arezzo, si verifica compressione, potrà cessare lo stato anomalo, in cui esse si trovano.

È quindi ovvio il proporsi la ricerca della saetta limite, al di là della quale comincia a verificarsi la compressione.

A tale uopo non si ha che a riprendere l'equazione precedente:

$$S_{(m-1)} = \frac{m\,(p+q)}{\operatorname{sen}\left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right)}$$

mettervi il valore di $S_{(m-1)}$, che si è ottenuto nel Capitolo XXII per l' ipotesi di $T_0 = o$, e che perciò deriva dalla equazione di condizione:

$$H = \frac{p+q}{\operatorname{sen}\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}.$$

Si avrebbe così:

$$\text{sen}\left(\Phi - \frac{\varphi}{2}\right) = \frac{m\,(p+q)}{S_{(m-1)}}$$

e rammentando che

$$\varphi = \frac{\Phi}{m}$$

potrà mettersi:

$$\text{sen}\,\frac{2\,m-1}{2\,m}\,\Phi = \frac{m\,(p+q)}{S_{(m-1)}}. \qquad (a)$$

D' altra parte, se si chiama:

s, la saetta dell' arco 2Φ,
$2c$, la corda,

si ha:

$$s = r\,(1 - \cos\Phi),$$
$$r = \frac{c^2 + s^2}{2\,s}.$$

onde

$$s = c\sqrt{\frac{1-\cos\Phi}{1+\cos\Phi}}. \qquad (b)$$

Col mezzo di queste equazioni si otterrà il valore di s cercato, insieme con quelli di H, e Φ che competono a quella monta speciale della Centina.

Ma il valore di $S_{(m-1)}$, che corrisponde al caso, in cui i tiranti cessano di essere compressi, fu trovato essere per la Centina d' Arezzo:

$$S_6 = 14530.$$

Ponendolo pertanto nella espressione (a) se ne dedurrà:

$$\Phi = 34°.\,17'.\,14'',$$

e questo valore ponendo nell' espressione (b), verrà:

$$s = 14 \sqrt{\frac{0,1736}{1,8264}} = 4^m,32.$$

Quando adunque la saetta del grand' arco, in luogo di metri 10, 50, fosse stata tenuta al disotto di metri 4, 32, tutti quanti i tiranti si sarebbero trovati in tensione, crescendo la medesima col diminuire della saetta, ma, in ogni caso, crescendo sempre dal mezzo alle estremità dell' arco.

Se non che, col diminuire della saetta, e coll' abbassarsi delle catene, diminuiscono i vantaggi, che conducono a preferire, in alcun caso, le centine arcuate. È da notarsi, in particolar modo, che coll' appiattirsi dell' arco, si estende manifestamente, a più grande porzione del tetto, l' inconveniente abbastanza grave, che tali centine presentano, di avere la parte suprema troppo scarsamente inclinata, onde difficoltà di scolo e pericolo di trapelamenti d' acqua.

Val meglio allora attenersi ai sistemi triangolari, i quali per altra parte risultano anche d' ordinario i più economici.

XXV.

Proposta di un nuovo tipo di cavalletto.

Ma qui combinando l' idea delle centine arcuate col sistema triangolare, mi cade opportuna l' occasione di proporre un nuovo tipo di cavalletto, ed è quello che trovasi delineato nella figura 4ª della Tavola III.

Rappresentino le due linee AB, BC le due falde piane di un tetto di grande portata. Segni il punto D l'altezza, che, sul mezzo della portata, si vuol libera da ogni impedimento sottostante; per i punti A, D, C si conduca un arco di circolo; si dividano gli archi AD, DC in un certo numero di parti eguali, più o men grande, secondo la più o men grande portata; per i punti di divisione si conducano altrettanti raggi e questi si prolunghino fino all'incontro delle rette AB, BC, rappresentanti i puntoni; o, se torna meglio, si dividano in parti eguali i puntoni, e dai punti di divisione si dirigano i raggi sul centro dell'arco; le porzioni intercette dei raggi si considerino quali saette destinate a consolidare i puntoni; si tirino le corde degli archetti compresi fra un punto di divisione e l'altro, e queste rappresentino altrettanti tiranti; finalmente dai punti di divisione 1,, 2,, 3, ... dei puntoni, si conducano le diagonali ai punti di divisione D, 1, 2, 3.... del grand'arco, e queste rappresentino altrettante razze.

Ei mi pare, che un tal sistema d'incavallatura, mentre presenta tutti i pregi del sistema Polonceau, e del sistema inglese a saettoni verticali, è di entrambi più elegante, siccome quello, che ad un tirante orizzontale o spezzato in due o tre rette, sostituisce un tirante, che segue l'andamento più spigliato di un arco di circolo: mentre più bella ed euritmica riesce la disposizione delle saette e delle razze.

La determinazione degli sforzi, che si esercitano nelle singole parti di una somigliante incavallatura,

dopo quanto ne abbiam detto, non presenta ombra di difficoltà; essa non è che un' applicazione della teoria che abbiamo sviluppata in sul cominciar di questo Studio, e della teoria delle travi continue sostenute in più punti.

XXVI.

Risoluzione grafica del problema degli sforzi che si sviluppano nelle varie parti della Centina d' Arezzo.

Con ciò avrei finito di esporre le considerazioni ed i calcoli, a cui la insorta controversia mi ha condotto. Se non che mi par prezzo dell' opera aggiungere al calcolo algebrico generale, che ho stabilito, ed all' applicazione numerica, che ne ho fatta al caso particolare nostro, la risoluzione del problema anche col metodo grafico.

Il problema essendo un problema statico, è suscettivo di un simile sistema di soluzione; poichè determinato col calcolo il valore della spinta orizzontale alla chiave, non si tratta più che di composizione e scomposizione di forze, e le forze si sa, possono essere rappresentate in direzione ed in intensità da linee rette proporzionali.

Questo sistema di soluzione, se non ha per sè il pregio di una rigorosa esattezza, a cagione della imperfezione degl' istrumenti, e della piccolezza della scala, colla quale d' ordinario si opera, ha però quello rilevantissimo della rapidità: e certamente, con un po' di diligenza nel disegno, e con una sufficiente scala, si può raggiungere tutto quel grado

di approssimazione, che basta per le occorrenze della pratica.

Messo adunque in iscala di 1:50 lo scheletro della mezza centina: assunta, per misura delle forze, la ragione di un millimetro per ogni cinquanta chilogrammi: prese, sulle verticali, lunghezze proporzionali alla somma $(p + q)$, nella direzione della gravità, cioè dall' alto al basso: condotta, al vertice supremo, la orizzontale rappresentante la reazione dell' altra mezza centina, epperò rivolta dalla chiave verso l' imposta, e presavi una lunghezza proporzionale al valore di H trovato coll' equazione dei momenti: procedendo, nella scomposizione e ripartizione delle forze, col medesimo ordine, col quale è proceduto il calcolo algebrico, si perverrà alle identiche conseguenze ed a resultati conformi a quelli che si sono ottenuti col calcolo.

E infatti se sul disegno, che è riportato nella Tav. II, si misurano le lunghezze delle linee, che rappresentano gli sforzi subìti dalle varie parti della Centina, e si paragonano coi risultati numerici, questi si trovano riprodotti, con tutta quell' approssimazione, che è lecito sperare da un disegno in così piccola scala.

Nè solo è fatta palese la intensità delle forze, ma la loro direzione eziandio, a talchè l' anomalia della compressione dei tiranti superiori, vi si rende manifesta, anche con maggiore evidenza, che non nel calcolo stesso.

XXVII.

Luoghi geometrici degli sforzi sui puntoni e sulle catene.

Se poi, sopra una retta presa per base, si riportano, in una scala qualsiasi, tante lunghezze, che rappresentino lo sviluppo della Centina, e i rispettivi vertici, e si conducano per i punti così segnati altrettante normali, e su queste si misurino le lunghezze rappresentanti gli sforzi subìti dalle singole parti del sistema in corrispondenza del rispettivo vertice, (avvertendo di considerare positive le normali da una parte della retta di base, negative quelle dalla parte opposta) col riunire le estremità delle normali, competenti a ciascuna categoria di sforzi, due a due, per mezzo di linee rette, si renderà sensibile all' occhio la legge di variazione, che segue ciascuna categoria di sforzi, da un vertice all' altro, in una data ipotesi, o col variare di esse.

Queste costruzioni si vedono praticate nella fig.ª 2ª della Tavola III, per gli sforzi dei puntoni e delle catene, nelle tre ipotesi della Centina quale si trova di presente supposta imperfettamente articolata: della Centina supposta più perfettamente articolata: e della Centina, dopo l'introduzione dell' apparecchio di tensione.

Dalla loro ispezione chiunque può vedere la continuità della legge di variazione, la anomalia che la causa eccezionale del maggior carico al culmine vi produce, e finalmente la mutazione re-

lativa del modo di essere della Centina, nei detti tre stati.

La costruzione delle curve degli sforzi non è cosa di mera curiosità. — Esse porgono un grande aiuto ed un mezzo spedito di riscontro dell' esattezza dei calcoli numerici, nei quali ognuno sa per prova, quanto sia facile cadere in errore, e quanto siano da ricercare, in conseguenza, i mezzi di verifica. — Esse poi, nel caso di progetti da eseguire, danno giusta norma nel regolare la sezione resistente delle singole parti, secondo la legge di stabilità.

XXVIII.

Ragionamento sul metodo di calcolo seguìto e su quello detto dei piani secanti.

Prima di dar fine a questo scritto, che porto fiducia non vorrà essere stimato soverchiamente diffuso, conviene che io dia ragione del metodo di calcolo seguìto, e lo metta a confronto con quello adottato dagl' Ingegneri, che mi hanno in esso preceduto.

Riflettendo alla natura della quistione, all' importanza scientifica dell' argomento, ed all' autorità dei contrarii giudizi pronunziati, io sono stato naturalmente condotto ad indagare, nelle più intime latebre, le forze e le reazioni sviluppantisi in un così complicato sistema, come è quello della Centina d' Arezzo; e da questa analisi paziente, scrupolosa e spinta alle ultime conseguenze, io sono riuscito a dimostrare, se il mio giudizio non erra,

in modo piano ed incontestabile, la vera maniera di essere delle singole parti e di tutto l' insieme del sistema.

E, difatto, qual altra via rimaneva da percorrere a me, che venivo ultimo dopo parecchi Ingegneri, i quali nei calcoli da loro instituiti, riuscivano a questo risultato: che il tirante più affaticato, (ed era per tutti il tirante supremo) era, per l' uno, soggetto ad uno sforzo di tensione di kilog. 9, 68, per un secondo, di kilog. 17, 11: per un terzo, di kilog. 17, 40: per un quarto, di kilog. 21, 39: per un quinto finalmente, di kilog. 34. 9 per mm.° q.° di sezione?

Se questa enorme varietà di risultati può, in parte, attribuirsi alla varietà dei carichi accidentali assunti, che variano da 25 a 50, a 60, a 100 kilog. per metro quadrato di superficie coperta; ciònondimeno, lasciati da parte i risultati estremi, che corrispondono, l' uno, al sovraccarico di 25 kilog. che è troppo esiguo: l' altro, al sovraccarico di 100, che è eccessivo, e stando ai risultati medii, che corrispondono al vero sovraccarico da considerarsi, io non mi poteva far capace, che una centina avesse potuto durare, per ben sei anni, soggetta ad uno sforzo, che supera sensibilmente il limite della elasticità, senza soffrire deformazioni permanenti ben più gravi, di quelle che si riscontrino nella Tettoia di Arezzo: non parendomi molto plausibile l' argomentazione, che si è addotta a giustificazione del fatto, che, nei sei anni trascorsi, non possano essersi verificate tante e così persistenti azioni esteriori, da produrre allungamento sensibile dei tiranti.

D' altra parte l' ispezione materiale delle centine, con quel deviare dei monaci dal piano verticale, il quale manifestamente accenna ad un difetto di tensione delle catene: con quella vicinanza delle catene stesse all' arco, tanto spinta, per rispetto alla saetta dell'arco, da far pensare, che catena ed arco finiscano per confondersi in un effetto unico, operando tutta la centina, nè più, nè meno, che come un arco solido, mi ha fatto nascere il sospetto, che nel sistema si sviluppassero alcune reazioni, a vantaggio della stabilità, a cui per avventura non si fosse posto mente, nel calcolo fatto dagl' Ingegneri, che ottennero i risultati medii di 17, 11: 17, 40 e 21. 39 kilog. di tensione per mm.° q.° di sezione del tirante più affaticato.

Ecco la cagione e l' origine del metodo di analisi al quale mi son trovato obbligato, ed al quale, per conseguenza, mi sono appigliato.

Ma mi si può opporre: — Queste forze, che voi dite svilupparsi nel sistema, capaci di produrre così favorevoli effetti, furono esse trascurate, o male stimate, da chi vi ha preceduto nel calcolo; — oppure è il diverso metodo seguìto dagli uni e dagli altri, che porta a tanta disparità di risultati?

Lasciando in disparte uno dei metodi di calcolo, che mi furono comunicati, troppo sommario e disconveniente ad un sistema così complicato come quello d' Arezzo, epperò troppo ovviamente conducente a risultati erronei; per quel che ho potuto rilevare dagli altri, fatti con più largo sviluppo, e con metodo, che, in altre circostanze, e con altro

fine, può forse essere utilmente applicato, si parte, a mio avviso, da un fallace concetto.

Si suppone cioè implicitamente, che il sistema di quella Centina si trovi, nella condizione di progetto, in uno stato di perfetto equilibrio, ed equilibrio pari a quello che si verificherebbe in un sistema composto di parti assolutamente rigide; poichè, tagliando con piani secanti il sistema, e surrogando nelle parti tagliate altrettante forze, che ristabiliscano la interrotta continuità del medesimo, si determinano queste forze, collo stabilire le condizioni d'equilibrio dei corpi rigidi fra le forze stesse e quelle operanti sulla parte residua del sistema.

Ora, indipendentemente da qualunque risultato analitico, come può egli supporsi equilibrata per sè stessa una Centina, la quale fu concepita senza alcuna norma scientifica per guida, e mandata ad esecuzione, colla semplice scorta di un modello, senza ombra di calcoli preliminari di nessuna specie, che intendessero a mettere la Centina stessa nelle migliori condizioni di equilibrio e di stabilità?

E equilibrio, quale fu supposto nei calcoli degl' Ingegneri, che mi hanno preceduto, non potrebbe esistere, nè nell' insieme del sistema, nè in alcuna delle sue parti, sebbene nella Centina, quale di presente si trova, vi sia equilibrio apparente e possa anzi esservi vero e reale equilibrio matematico.

E di fatto, se noi prendiamo a considerare la parte superiore, essa, come già abbiamo dichiarato, altro non è che un poligono articolato, posto in

un piano verticale, carico di pesi, ed appoggiato per le due estremità ad un piano orizzontale. — Ora noi sappiamo dai primi elementi della Statica, che la curva d'equilibrio di un simigliante poligono, è, se si rovescia, conforme a quella, che naturalmente assumerebbe una catena pesante di eguale sviluppo, sostenuta pei due capi a due punti fissi, posti sulla medesima orizzontale, alla medesima distanza che le estremità del poligono: in cui i pesi elementari fossero ripartiti colla medesima legge, che nel poligono stesso; curva, che per ciò appunto ha ricevuto il nome di *catenaria*.

Ma nel caso nostro, invece di una catenaria, noi abbiamo un arco di circolo, che è quanto dire una curva, che non è di equilibrio, perchè la ripartizione dei pesi non è tale, che il loro effetto riduca naturalmente la catenaria ad un arco di circolo. Di quì, una tendenza costante nel poligono superiore, a mutare la sua arcatura iniziale in quella della catenaria corrispondente.

Se noi passiamo a considerare le saette, noi abbiamo riconosciuto, che, tranne quella del vertice supremo, la quale, per la simmetria del sistema, non si trova sollecitata da alcuna forza, che tenda a smuoverla dalla sua posizione verticale: in tutte le altre, si verificano sforzi più o men grandi, ma tutti tendenti a far rotare la saetta intorno al suo punto d'innesto col poligono superiore; quindi tendenza a deformazione nella posizione delle saette.

Venendo, alla perfine, al sistema delle catene, noi abbiamo veduto, che esse pure costituiscono un

poligono articolato, disposto secondo un arco di circolo, fisso pei due capi e sollecitato, nei suoi vertici, dalle forze che gli sono trasmesse dal poligono superiore. — Or noi sappiamo dalla Statica, che le condizioni di un tale poligono, per essere equilibrato, sono: che la direzione delle forze sollecitanti divida per mezzo l'angolo dei due lati contigui, e la intensità delle forze stesse sia costante per ogni vertice quando il poligono sia regolare; ora, nel nostro caso, non si verifica nessuna di queste condizioni; perchè la direzione della forza è quella del monaco, che è diretto secondo il raggio della curva direttrice del poligono superiore, e non secondo la bisettrice dell'angolo dei due lati contigui del poligono considerato. La intensità poi, mentre il poligono è assai vicino ad essere regolare, è grandemente varia da punto a punto; quindi nuova tendenza a deformazione nell'intero sistema, nascente dalle condizioni in cui si trova il poligono interiore.

La nostra Centina adunque è ben lontana dal trovarsi in quello stato d'equilibrio, in cui fu supposta, e che non è lecito nemmeno supporre siasi verificato, anche solo per un istante brevissimo, dal momento, che in tutte le sue parti, vi era una così evidente e continua tendenza a mutare di posizione e di forma; tendenza, che, se ha cessato di manifestarsi in modo sensibile, vale a dire con un movimento progressivo e continuo, ciò è da ascriversi alle intrinseche qualità della materia, cioè alla compressibilità, flessibilità ed estensibilità delle singole parti della Centina, le quali sviluppano altrettante forze,

che entrano in lotta con quelle, che dalle forze estrinseche derivano nel sistema, e, non contrastate queste ultime, nella loro azione, dalla opportuna predisposizione delle parti, tendono a deformarlo.

E delle forze nascenti dalle qualità intrinseche della materia, e che pure è indispensabile considerare seguendo un tal metodo di calcolo, non fu tenuto assolutamente alcun conto.

E che sia indispensabile tenerne conto risulta evidente da ciò: che in questa lotta di forze, se può nascere un vero e reale equilibrio matematico, può anche venire un turbamento radicale nelle condizioni statiche del sistema, ancorchè esse risultassero plausibili colla verificazione delle equazioni stabilite nell' ipotesi di perfetta rigidità delle singole sue parti.

Gli è che le condizioni, le quali sono necessarie e bastano a stabilire l' equilibrio di un sistema assolutamente rigido, se sono necessarie, non sono più sufficienti ad assicurare l' equilibrio del medesimo sistema, quando vi s' introduce la considerazione dell' elasticità: e tante è mestieri aggiungerne, quante, in ogni caso particolare, si richiedono per soddisfare alle conseguenze prodotte da tale qualità indivisibile della materia.

Dal che deriva una complicazione di calcoli, tanto maggiore, quanto più complesso è il sistema, da rendere assolutamente inestricabile, per non dire impossibile, la soluzione analitica del problema, quando si esce dai casi più elementari e più semplici.

Il metodo quindi *dei piani secanti* non è prati-

camente applicabile, nelle condizioni del nostro problema, ad un caso così complesso, come quello che abbiamo di fronte. Seguendo codesto metodo, che pur si presenta colle apparenze della massima razionalità, o si dà in pieno in tutta la difficoltà, che la elasticità introduce nel problema, o non facendone conto, si dà in pieno nell'errore.

XXIX.

Dimostrazione della differenza che corre tra un sistema rigido ed un sistema elastico.

Che se queste idee alquanto astratte sull'influenza, che l'elasticità della materia esercita nell'equilibrio di un sistema complesso, lasciassero ancora alcun dubbio nell'animo di chi legge, valga a toglierlo il seguente esempio, che parla ai sensi.

Si supponga un vagone, a tutto carico, fermo sopra un tratto di strada orizzontale. Per tutto il tempo in cui esso rimarrà immobile si verificherà un perfetto equilibrio matematico, tra le forze operanti e le forze resistenti; i regoli reagendo al peso, che loro è trasmesso dalle ruote, con forza perfettamente eguale e contraria a quella del peso integrale del vagone.

Immaginiamo ora che s'imprima il movimento al vagone, e che perciò si eserciti una spinta sovra la sua parete posteriore, che possiamo supporre perfettamente rigida.

Se noi volessimo determinare il valore della forza necessaria a provocare il movimento, noi non

avremmo a far altro, che considerare l' istante in cui il vagone è in procinto di muoversi, e stabilire l' equazione di equilibrio tra la forza ricercata e la resistenza opposta al movimento dagli attriti: resistenza, che supponiamo conosciuta per precedenti esperienze.

Il valore, che si ricaverebbe da questa equazione, darebbe la vera misura dello sforzo da farsi per ottenere l' effetto voluto.

Ma se invece di sospingere il vagone, facendo forza sopra la parete posteriore, come abbiamo supposto, noi lo sospingiamo facendo forza sui respintoi, egli è evidente, che prima d' indurre nel vagone alcuna tendenza al movimento, noi dobbiamo esercitare uno sforzo, e consumarlo in non altro effetto, che quello di mettere in tensione le molle, contro cui i respintoi si appoggiano.

Non è, che dopo aver provocato il dovuto grado di tensione nelle molle, che comincierà l' azione esercitata sui respintoi, a propagarsi in tutte le altre parti del vagone; e quindi, allora solo comincierà l' effetto, che si otteneva, nella prima ipotesi, dal primo istante dell' applicazione della forza. Per conseguenza, lo sforzo da farsi per mettere in movimento il vagone, in questo secondo modo d' azione, è assai diverso da quello che bastava nella prima ipotesi, nè esso potrebbe essere determinato colla sola equazione di prima.

Nell' addotto esempio il vagone rappresenta il sistema nello stato rigido: le molle dei respintoi, la sua elasticità.

Nel primo modo di operare, la elasticità non entra in azione: essa vi entra nel secondo, ed induce una differenza nello sforzo reale da esercitarsi, tanto più notevole, quanto maggiore è la elasticità delle molle: tanto più difficile a determinarsi analiticamente, quanto più complicato si supponga il loro congegno, il quale potrebbe essere combinato, in modi così diversi e molteplici, da raffigurare qual si voglia sistema elastico più complesso.

È adunque manifesta la differenza, che corre, tra un sistema rigido ed un sistema elastico. In quello l' equilibrio non può sussistere: che colla perfetta elisione di tutte le forze direttamente applicate al sistema: coll' assoluta mancanza di ogni movimento rotatorio; in questo, l' equilibrio può verificarsi, anche quando il complesso delle forze manifestamente operanti non si elida, e non risultino verificate, per esse, tutte le condizioni dell' equilibrio dei corpi rigidi, poichè le maggiori condizioni, richieste dall' elasticità, per l' equilibrio, possono influire su quelle prime equazioni, e modificarne le condizioni.

Nel vagone del nostro esempio, finchè l' azione impellente non è impiegata, che nell' opera della tensione delle molle, niuna modificazione avviene per rispetto al movimento del sistema, quantunque vi abbia una forza palesemente applicata.

Così, nella nostra Centina, se la considerazione della elasticità ci ha tolti dall' assurdo, nel quale cadevamo tenendoci alle condizioni d' equilibrio dei corpi assolutamente rigidi, per rispetto al si-

stema delle forze. verticali, che in essa si manifestano: la considerazione della elasticità ci darà ragione della differenza, che vi si ricontra, tra le spinte orizzontali.

Se malgrado questa differenza, non avviene movimento, come dovrebbe avvenire considerando la Centina quale un sistema di parti rigide, ciò significa, che la forza eccedente va a dileguarsi, sminuzzandosi in mille effetti, per entro il sistema, comprimendo, inflettendo, allungando le sue parti, secondo il modo, con cui queste si oppongono alla sua azione.

XXX.

Conclusione.

Ecco adunque svelata la cagione prima e precipua della disparità e fallacia dei risultati ottenuti dagl' Ingegneri, che mi hanno preceduto in questo calcolo; e dico fallacia, inquantochè parmi di essere ormai in ragione, di stimare esatti ed incontestabili i risultati, a cui sono pervenuto per più diretta via, evitando le difficoltà insormontabili, in cui mi sarei imbattuto, ove, seguendo il metodo più sintetico *dei piani secanti,* che talvolta si consiglia nelle scuole, avessi voluto introdurre nelle condizioni d' equilibrio, la considerazione della reazione elastica della materia.

Errata la base, non è maraviglia che siasi venuto a conseguenze, che per nulla si accordano coi fatti. Laddove la esattezza dei risultati, a cui porta il mio metodo d'analisi, è confermata, in modo

mirabile, — dagli effetti riscontrati, fin da principio, nelle prove dirette, che furono fatte sul modello in grande scala; — dalle relativamente lievi deformazioni subìte dalle centine; — dalla qualità delle deformazioni stesse, — e, più che da ogni altra cosa, — dal fatto della durata esistenza della Tettoia, per un periodo così lungo, com'è quello dei sei anni trascorsi dalla sua costruzione.

E quì non è forse inopportuno, nè è superfluo, avvertire, come tal metodo di analisi altro non sia, che la razionale applicazione del processo e dell'ordine naturale, con cui in realtà gli sforzi si generano e si propagano da una parte all'altra del sistema, nelle ipotesi assunte di sua costituzione.

E quì mi arresto: nella speranza di avere esaurito il tema, che mi fu proposto, con tutta quella pienezza di argomentazioni, e con tutto quello sviluppo di calcoli e di conseguenze, che la natura della quistione esigeva: col desiderio che la non lieve fatica sostenuta possa almeno risparmiar tempo e lavoro a coloro che mi seguiranno.

I quali ritroveranno, nelle formule generali da me stabilite, la determinazione rigorosa degli sforzi, che si generano, secondo i casi, nelle varie parti di un sistema poligonale articolato complesso, che abbia per direttrice l'arco di circolo: alla pari di quanto si ritrova, d'ordinario, nei Trattati di Costruzioni, pei sistemi articolati più elementari.

Avranno una guida sicura nell'impianto del calcolo, anche negli altri casi, senza errare incerti, in

vani e lunghi tentativi, alla ricerca della via da tenere.

Sapranno meglio, qual fiducia si meritino le generali equazioni d'equilibrio dei sistemi assolutamente rigidi, applicate da sole ai sistemi composti di parti elastiche. — Le quali, se nel caso della Centina d'Arezzo, a giudicare dai risultati ottenuti dagl' Ingegneri, che le hanno così applicate, ove fossero state prese per guida nello studio del progetto, avrebbero portato a raddoppiare la sezione dei tiranti già maggiore del bisogno, e così ad eccedere nella stabilità, senza, per altro, avvertire l'anomalia della compressione e la vera legge di variazione degli sforzi: potrebbero, per avventura, applicate senz' altro ad altri casi, condurre a risultato diametralmente opposto. — Potrebbe infatti accadere, che le forze sviluppate dalle reazioni elastiche, (le quali, nel caso della Centina d' Arezzo, riescono in favore della stabilità), in altra disposizione di parti, non valessero ad elidere gli sforzi, che le forze estrinseche lasciano nel sistema senza acconcio contrasto, e per conseguenza cospirassero con esse alla sua deformazione.

Vedranno infine, qual grande giovamento ed aiuto si possa avere, e quanta celerità e sicurezza conseguire, nella risoluzione del problema, col metodo delle costruzioni grafiche; le quali riescono a risultati sufficientissimi ai bisogni della pratica, sol che alquanta cura si ponga nell' eseguire il disegno, e sol che s'impieghino strumenti rettificati e scale non troppo piccole.

Mi riputerò assai bene avventurato, se questo mio Studio, incontrando il consenso degli Uomini competenti, avrà contribuito a portare maggior chiarezza in una parte non poco importante della Scienza e dell' Arte delle Costruzioni, quale è quella dei sistemi articolati complessi: ed a stabilire, in modo assoluto, il metodo di calcolo, che è da seguire, per giungere senza ostacoli, colla massima speditezza, alla più esatta e pratica determinazione degli sforzi, che si producono nelle varie parti di un sistema comunque complesso, più o meno perfettamente articolato: e con essa procacciarsi norma sicura, per la più utile ed economica ripartizione della materia.

APPENDICE.

Avuta comunicazione dei calcoli degl' Ingegneri Governativi, dopo compiuti quelli riportati nel presente Studio, si è ritrovata una differenza nella saetta della Centina, di $0,^{m}70$ in meno; poichè invece di $10,^{m}50$, come fu da me assunta in conformità del progetto approvato e del modello, essa è notata di $9,^{m}80$, come ho poi riconosciuto essere stato praticato nell' esecuzione.

È facile rendersi conto della variazione, che una tale differenza induce negli sforzi delle singole parti della Centina. Basta per ciò prendere le tre equazioni del Capitolo XXIV.

$$s = r\,(1 - \cos\Phi),$$

$$r = \frac{c^2 + s^2}{2s},$$

$$S_{(m-1)} = \frac{m\,(p+q)}{\operatorname{sen}\left(\frac{2\,m-1}{2m}\right)\Phi}.$$

Dalle due prime si ricava:

$$\cos\Phi = 1 - \frac{2\,s^2}{c^2 + s^2},$$

e ponendo in questo valore:

$$s = 9^{m}80$$
$$c = 14^{m}00$$

si deduce:

$$\Phi = 70.^{\circ}\ 9'.\ 57''.$$

Introducendo questo valore nella terza equazione, con quelli che competono nel nostro caso ad m, p e q viene:

$$S_6 = \frac{7700}{\operatorname{sen}(65.^{\circ}\ 9.'\ 14'')} = 8485.$$

Confrontando questo valore con quello, che noi abbiamo ottenuto, per la saetta di $10,^{m}50$, che è:

$$S_6 = 8275$$

noi vediamo quanto piccola differenza corra tra i due casi, ond'è che possiamo con tutta sicurezza dichiarare, che la differenza di saetta, di cui è quistione, non infirma per nulla i risultati ottenuti e le conseguenze dedotte.